...per ripensare il colloquio di Villa Falconieri —

B d Finetti

Estratto dal *Periodico di Matematiche*

Febbraio - Aprile 1964 - Serie IV, vol. XLII n. 1-2 (pagg. 72-114)

BRUNO DE FINETTI

Insegnamento di Materie scientifiche nella Scuola media unica e preparazione degli insegnanti

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Febbraio Aprile 1964 - Serie IV, vol. XLII, n. 1-2 (pagg. 72-114)

QUESTIONI DIDATTICHE

Negli scorsi numeri della rivista abbiamo iniziato un dialogo con i nostri Lettori, specialmente sull'argomento dell'insegnamento della Matematica nella nuova «scuola dell'obbligo»; non è un mistero per nessuno il fatto che in proposito esistono oggi opinioni molto divise, sopratutto su una questione importantissima, cioè se le due materie: «Matematica» ed «Osservazioni ed elementi di scienze naturali» debbano essere insegnate o non da una stessa persona.

Su queste pagine ci siamo fatti portatori dell'opinione di molti laureati in matematica che si sono trovati a dover insegnare una materia per la quale non avevano nè simpatia nè preparazione. Abbiamo anche riportato, nell'ultimo fascicolo dello scorso anno, il voto della commissione scientifica dell'Unione Matematica Italiana, voto col quale la commissione stessa si dichiara apertamente contraria all'affidare entrambi gli insegnamenti ad un'unica persona.

Riportiamo qui una relazione (*) del prof. B. de Finetti che è invece favorevole all'abbinamento dei due insegnamenti: peraltro la sua tesi non è del tutto in contrasto con la nostra, in quanto a suo parere tale abbinamento si dovrà attuare solo quando gli insegnanti di questa scuola saranno stati adeguatamente preparati da corsi universitari specializzati.

Siamo grati al prof. B. de Finetti per averci permesso di riprodurre il suo pensiero su queste pagine, perchè in tal modo il dialogo può diventare veramente utile e fecondo, attraverso la conoscenza di tutte le ragioni e di tutti gli argomenti che vengono presentati pro e contro una certa tesi.

Riteniamo che l'ospitare sulle nostre pagine dei pareri diversi giovi a far raggiungere a tutti quella chiarezza di visione che dovrebbe orientare ogni azione futura e sia nello stile delle migliori tradizioni di liberalità e di apertura di idee che la rivista ha sempre cercato di professare e realizzare.

La Direzione

(*) Al riguardo riportiamo le seguenti notizie forniteci dall'autore.

La presente « relazione » era in effetti un appunto, fatto per riepilogare discussioni precedenti e servire di base per la loro prosecuzione e conclusione, nella « Commissione di studio per il problema dell'insegnamento delle materie scientifiche nella Scuola media unica e la preparazione degli insegnanti », commissione costituita nel seno della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma. Nel luglio 1963 la Commissione, e quindi il Consiglio di Facoltà, si espressero in linea di massima favorevoli alla soluzione prospettata e disposti a studiare l'istituzione presso la Facoltà di un corso di laurea in « Materie scientifiche » (corrispondente a quello per « Materie letterarie » della Fac. di Magistero), inteso alla preparazione specifica di insegnanti di « Matematica e osservazioni scientifiche ». Gli appunti come tali, pur rispecchiando l'orientamento prevalso in dette decisioni, non sono comunque che l'espressione di considerazioni personali.

Mi auguro che la loro pubblicazione — per cui ringrazio la Direzione del « Periodico » — giovi, oltre che a far riflettere sul punto di vista esposto, a dissipare alcuni malintesi dovuti probabilmente alla lettura affrettata e difficoltosa della poco riuscita riproduzione in ciclostile distribuita per il Consiglio di Facoltà e limitatamente diffusa tra persone interessate al problema.

Sulla questione ebbi occasione di riferire nella « IUCTS Frascati Conference » (IUCTS - Inter Union Commission for Teaching of Science), che, sotto la presidenza di Marshall H. Stone riuniva esponenti delle varie unioni scientifiche internazionali (fisici, chimici, biologi, ecc.) per studiare i necessari collegamenti dell'insegnamento della matematica con quello delle altre scienze. E la prima « risoluzione » votata a conclusione dei lavori, riconoscendo l'urgenza di tale connessione, così si esprime:

« *La crescente dipendenza delle scienze naturali (od ora anche delle scienze del comportamento) da concetti metodi e tecniche di natura matematica comporta implicazioni per riguardo all'educazione che meritano di essere esaminate con seria attenzione da matematici e scienziati. Da una parte, gli insegnanti di matematica dovrebbero mettere sistematicamente in evidenza le connessioni tra la matematica e le diverse branche della scienza, e sfruttare sistematicamente queste connessioni per aiutare i loro allievi ad apprendere più facilmente la matematica ed a comprenderla più a fondo. Dall'altra parte, gli insegnanti di scienze dovrebbero sviluppare adeguatamente le applicazioni della matematica nel proprio campo* *e curare con speciale attenzione di accrescere nei suoi studenti la padronanza dei concetti metodi e tecniche matematici. Particolare cura dev'esser presa dagli insegnanti sia di matematica che di scienze nel far prender pratica nella formulazione matematica di problemi scientifici e nell'impiego di ragionamenti euristici e di approssimazioni semplificatrici* ».

Che questa unitarietà della visione scientifica (e in particolare della matematica con tutto il resto) si possa raggiungere meglio, al livello della scuola media, con un insegnante unico di preparazione adeguata ed equilibrata anzichè con due è mia convinzione ben ferma, ma tuttavia di per sè una questione in certo senso secondaria se limitata al giudizio di fatto sulla maggior probabilità di conseguire un medesimo intento per tale via o per quella opposta. Il dissenso diviene fondamentale se invece è lo scopo stesso che è diverso: se si configura l'insegnamento matematico come inteso a sviluppare soltanto certi tipi di ragionamento distinti e contrapposti a quelli (induttivi anzichè deduttivi) di altre scienze. Temo comunque che, venga esplicitamente sostenuta o meno una contrapposizione del genere, il risultato di insegnamenti separati sarebbe sempre quello di un'incomunicabilità fra i due campi, perchè un insegnante di matematica digiuno di cultura in altre scienze e viceversa non potrebbero che presentare la loro materia in modo arido e limitato. Per fare quello che chiede la risoluzione IUCTS dovrebbero entrambi, oltre la specializzazione in matematica o in altre scienze, avere quella preparazione nell'altro campo che permetterebbe a ciascuno e con vantaggio di tenere entrambi gli insegnamenti rendendoli in tal modo interessanti istruttivi formativi.

Il dissenso non sta nel voler rendere l'insegnamento « più superficiale » come ritengono coloro che identificano la « scientificità » con certi malvezzi difficili a sradicare. L'intendimento è comune, ma il dissenso consiste nel giudicare « superficiale » (ed anzi deleteriamente diseducativo) l'insegnamento tradizionale o un rinnovamento di contenuti che non alteri le sue caratteristiche, e ritenere pertanto che ciò che altri dice « superficiale » sia l'unico vero rimedio contro ciò che è sostanzialmente superficiale. (Ciò vale per la matematica come per tutto l'insegnamento: considerazioni simili, riferite agli insegnamenti « umanistici », si trovano ad es. in un articolo - « Esperienze didattiche attive », di Adriano Colombo, in *Scuola e democrazia*, marzo 1964 — di cui mi piacerebbe poter riportare ampi brani a condanna della scuola che mira soltanto « ad esercitare con successo le capacità di gioco mnemonico e verbale nella regione dei luoghi comuni »).

Ma è inutile mi dilunghi su argomenti che ho ribadito tante volte (benchè le storture da denunciare siano infinite, i loro aspetti spaventosi, e tuttavia l'attenzione che vi si presta sia scarsa causa una rassegnata assuefazione): per chi avesse interesse a leggere qualcosa tra gli scritti precedenti sull'argomento o ad esso connessi dò alcune indicazioni.

Prefazione a *Matematica Logico-Intuitiva* (1944), 3a ed. Cremonese, Roma, 1959.

« La funzione vivificatrice della matematica », *Annuario Univ. Trieste*, 1948-49 (prolusione a. acc. 1948-49).

«È difficile capire la matematica?», *Archimede*, VI, 4-5, 1954.

«Paradossi in tema d'insegnamento», *Civiltà delle Macchine*, 1957.

«La scuola in crisi», *Civiltà delle Macchine*, 1957.

«Evoluzione verso una sintesi», *Statistica*, 1960.

«Scatenare l'intelligenza, non soffocarla», *Mercurio*, 1960.

«I matematici nell'industria» (nel volume *L'economia italiana ha bisogno di laureati*, Com. Naz. Produttività), Roma, 1961.

La matematica per le applicazioni economiche (con F. Minisola), ed. Cremonese, Roma, 1961.

Scritti vari in *La matematica negli Ist. Tecn. Comm.* (Atti di un corso di aggiornamento), Min. P. I., 1962.

«Il mondo moderno ha bisogno di matematici», *Mercurio*, 1962.

«Suggerimenti e critiche», *Homo faber*, 1962.

«Riflessioni su una gara matematica», *Archimede*, 1962.

«PBIs, ovvero: idee mezzo-maturate», *Civiltà delle Macchine*, 1963.

«Gare matematiche a Roma», litogr. Fac. Scienze Roma, 1963.

«L'apporto della matematica nell'evoluzione del pensiero economico» (in partic., Parte I: La matematica e la sua funzione entro gli altri campi), conf. Congr. Un. Mat. Italiana, Genova, 1963 (atti in c. di stampa, prevent. in lit., ed. Ricerche, Roma, 1963).

«Ostacoli sul cammino della scienza» (in c. di stampa per *Civiltà delle Macchine*).

Insegnamento di Materie scientifiche nella Scuola media unica e preparazione degli insegnanti

I) *Idee generali su metodi e obiettivi dell'insegnamento.*

1) *Premessa.*

Il fatto di premettere alcune idee generali va certo al di là dell'argomento immediato, concernente esclusivamente la scuola media unificata. Non sembra tuttavia fuori luogo nè inutile perchè, da una parte, può far meglio intendere e inquadrare le proposte e idee riguardanti il caso specifico in una visione e tesi generale, e, in secondo luogo, può render chiaro che analoghi intendimenti, anche se in altre forme e in minor misura, dovrebbero, a mio avviso, ispirare la riforma di metodi e di indirizzi in ogni ordine di scuole, non esclusa l'Università.

Anche ciò varrà a confermare che non si tratta di tesi ispirate a un « declassamento » della scuola media unica, in cui si considerino adeguati dei metodi « cattivi » o « semplicistici » per sfiducia nell'attitudine di studenti e/o insegnanti ad assurgere a metodi « buoni » o corretti; al contrario si tratta di una revisione e rifiuto dei metodi che per nostra pigrizia continuano ad imperversare: revisione e rifiuto che devono essere particolarmente totali e radicali nell'età formativa dove il danno che ne deriva sarebbe difficilmente e forse in nessun modo rimediabile in seguito.

Al contrario, proprio la scuola media unica sarebbe la realizzazione più perfetta e ideale dei criteri di insegnamento formativo, sulla cui base si dovrebbe contare per evitare che anche in seguito, dove purtroppo esigenze di specializzazione obbligano a lacerazioni e schematizzazioni che impoveriscono la visione del bosco per approfondire l'esame di qualche albero, tale effetto si realizzi in modo troppo rovinoso come ora avviene e com'è fatale in una scuola «scolastica».

2) *Apertura.*

L'insegnamento scolastico — almeno nei sistemi passivamente tramandati e tenacemente abbarbicati nelle nostre scuole — fa apparire l'insieme delle conoscenze come qualcosa di chiuso e sistemato in un ordine univoco e definitivo da trasmettere — un mattone dopo l'altro, un mattone sopra l'altro — a coloro che sono condannati a frequentare scuole del genere. Nello sviluppo della personalità e della mentalità di un individuo ci si comporta come se si pensasse che sia possibile formarne il corpo dapprima costruendo lo scheletro, poi rivestendolo di muscoli e di pelle, poi applicandovi o inserendovi dei pezzi speciali (cervello, cuore, stomaco, ecc.) e collegandoli con opportuni canali, e via via completandolo nella speranza che quando uno è arrivato ad applicarvi con tocco finale le unghie il coso comincerà a vivere. Se il coso ha da vivere dovrà invece svilupparsi come un organismo, tutto insieme continuamente, senza lasciar atrofizzare una parte in attesa di svilupparla quando sarà completata un'altra che ha motivi di precedenza. E tale crescenza dovrà apparire come potenzialmente illimitata, aperta, proprio perchè la crescita di ogni singolo organo è condizionata dallo sviluppo di tutto il resto e lo condiziona.

3) *Il razionale e il subcosciente.*

Queste premesse si concretano in molti aspetti e conseguenze di grande importanza: la prima — che qui vorrei sintetizzare — conduce a un ripensamento e al capovolgimento della posizione abituale nei riguardi dell'uso della ragione nell'apprendimento.

Abitualmente, sembra che la preoccupazione sia di far tabula rasa di tutto ciò che fa parte della più preziosa acquisizione dell'intelligenza umana nel corso dell'infanzia: la conoscenza immediata intuitiva inconscia o pressochè inconscia di un'infinità di cose e la capacità di orientarsi e reagire istintivamente o con lume spontaneo di intelligenza alle esigenze o problemi che ne derivano. Si dovrebbe fare tabula rasa di ciò perchè non è abbastanza scientifico o abbastanza filosofico secondo le predilezioni di certi specialisti; in base alle loro convinzioni si dovrebbe fargli riimparare in modo puramente razionale e colla preoccupazione del più pedante rigore con grande spreco di tempo una piccola parte di ciò che già aveva acquisito, travestendola poi in modo che ne perda la visione ed il gusto. Così si atrofizza e distorce l'intelligenza che si dovrebbe sviluppare; resta, infatti, da una parte, il nucleo di conoscenze intuitive di cui uno deve servirsi, ma su cui l'insegnamento ha steso un velo di diffidenza, e dall'altra rimangono residui più o meno indigeriti e indigeribili di astruserie o mattoni o pillole propinati contro voglia e senza persuasione.

Invece, per assolvere alla sua funzione, la ragione dovrebbe essere utilizzata come *complemento* delle facoltà intuitive, atto a perfezionarle, a svilupparle, anche — beninteso — a correggerle con lo spirito critico e con l'abito gradualmente acquisibile della riflessione metodica; non però a sostituirle. Se vi fosse incompatibilità, la scelta dovrebb'essere in favore dell'istinto: è indubbiamente più sapiente un ragno o un somarello che una bobina in cui fosse condensata tutta l'Enciclopedia o tutti i corsi universitari del mondo.

Per venire ad esemplificazioni concrete: il saper dire qualcosa verbalmente o saperlo calcolare mi sembra significare poco o nulla se alla conoscenza teorica non corrisponde una sensazione immediata (p. es. se uno conosce le condizioni d'equilibrio di una travatura e sa calcolare se un certo elemento è teso o compresso, ma non si raffigura cosa succederebbe togliendolo, non ha la sensazione che mettendovi la mano dovrebbe sorreggere o tirare per evitare che cada).

4) *Difetti della trattazione sistematica.*

Abbiamo già rilevato due difetti della consueta procedura di insegnamenti ispirati a una trattazione sistematica:

— l'impressione di chiusura anzichè di apertura nel conseguimento della conoscenza,

— l'impressione di voler creare ex novo qualcosa da sostituire a quanto già è posseduto intuitivamente, anzichè apportarvi complementi.

Altri difetti, più o meno inerenti alla struttura di una pretesa costruzione sistematica, derivano dalla necessità in cui essa si trova di:

— spezzare lo scibile in compartimenti stagni per meglio adattare ogni brandello in uno schema artificiosamente semplicistico secondo l'ideale della famigerata formula « autonomia didattica e dignità scientifica » (e ne riparleremo),

— seguire vie spropositatamente lunghe, e diseducative in quanto fanno perder di vista la vera prospettiva delle cose, nell'intento di procedere passo passo.

Quest'ultimo intendimento, per darne un'immagine caricaturale (ma non troppo falsata), consisterebbe nell'impedire a uno scolaro di Roma di apprendere che esiste Milano (o farglielo scordare se disgraziatamente ne avesse avuta notizia) fino a quanto non avrà appreso quanti paracarri ci sono in ogni tratto dell'autostrada che vi conduce e come si chiama ogni torrentello che attraversa.

Un esempio fuori di metafora: il fatto che possa essere utile (e ciò può essere contestato), illustrare spesso fatti geometrici sul caso del piano o su esempi nel piano e su figure semplici come ad es. i triangoli, non può giustificare l'idea di limitarsi per mesi o per anni a parlare solo di geometria piana o addirittura di triangoli, lasciando deteriorare e immeschinire l'idea di geometria fino a restringerla a tali casi banali e facendo perdere l'intuizione spaziale. Anche se certi ragionamentini vanno limitati al triangolo o al piano, in qualche modo si può sempre almeno farne intuire l'estensibilità ad ogni tipo di curve, figure o solidi, o almeno tener viva nel frattempo con studi magari non connessi alla trattazione sistematica la visione di problemi nello spazio.

E ancora un difetto, spesso rilevato da molti pedagogisti e la cui gravità è patente:

— la passività del discente, condotto per mano alla cieca in modo da evitare errori senza che di ciò abbia coscienza e quindi vantaggio.

Infatti, l'imparare una cosa senza errori (al di fuori del vantaggio momentaneo di non cadere in errori) non è affatto istruttivo; come apprendimento di un metodo, di un rigore, di una capacità, atto ad evitare errori, manca l'elemento essenziale, cioè la sensazione di come si cade in errore e perchè lo si evita con quelle precauzioni e non altrimenti. Se uno viaggia sicuro e tranquillo a fianco di un autista perfetto non impara ad essere un autista perfetto, ma pensa che chiunque può prendere il posto con tutta naturalezza (oppure, con altro carattere, pensa che solo individui eccezionali privilegiati vi possano riuscire; comunque non si rende conto realisticamente di quali possibilità ha lui di fare più o meno bene).

5) *Compartimenti stagni.*

Nessuna disciplina, avulsa dal contesto generale, giustifica la propria esistenza e la fatica imposta a chi deve apprenderla. Questo mi sembra un assioma da cui è doveroso prender le mosse.

Perchè l'apprendimento sia agevole e fruttifero, è necessario che ogni nuovo elemento vada ad arricchire il patrimonio di pensiero e di nozioni acquisito collegandosi con tutto ciò che può avvantaggiarsi da tale collegamento. Altrimenti sarà una delle solite cianfrusaglie scolastiche che saranno servite solo a far perdere del tempo per superare stupidi esami e saranno poi inevitabilmente dimenticate (e che in caso diverso rimarrebbero allo stato di scorie senza senso a ingombrare settori della memoria, e sarebbe peggio).

Di questi collegamenti, qualcosa dev'essere dato subito, per aiutare la stessa comprensione del contenuto e della ragion d'essere di concetti e procedimenti da apprendere; soltanto allora altri collegamenti saranno visti da ciascuno con l'allenamento, ed anche aiutato da cenni e suggerimenti più o meno precisi.

Neppure all'Università, neppure in un congresso in cui un matematico parla ad altri matematici (o un fisico a fisici, ecc.), è in genere ammissibile o opportuno parlare di qualcosa in gergo strettamente tecnico senza chiarimenti applicativi o interpretativi che suscitino almeno una certa suggestione, ed infatti per solito non mancano gli elementi intuitivi. Comunque, in una tale sede, possono bastare pochi cenni, perchè gli ascoltatori sono in grado di ricostruirsi da sè, o con pochi aiuti, le immagini necessarie; così anche in scuole di grado sufficientemente avanzato dove si può contare su precedenti visioni abbastanza formate si potrà avventurarsi per qualche tempo in trattazioni sistematiche a compartimento stagno per render più coerente un certo insieme di idee, senza rischio di far dimenticare i significati pratici. Ma all'inizio il pericolo c'è, e bisogna tenersi saldamente ancorati a chiari molteplici esempi, di concrete utili interpretazioni ed applicazioni, per evitare che l'espediente di una trattazione isolata, astratta, chiusa in sè stessa e in un groviglio di neologismi terminologici, appaia per davvero un vuoto gioco di parole. E, in altri casi, l'utilità di tener separati — per semplicità di esposizione e di concentrazione dell'attenzione — certi aspetti di un fenomeno (p. es. meccanici, fisici, chimici, biologici) non deve far pensare a una separazione radicale che spezza la visione di una cosa in tanti frammenti giustapposti, ma irriducibilmente estranei tra loro. Bisogna, al contrario, insistere sull'unitarietà di tutti i fatti e di tutto il sapere, abituando poco a poco a vedere che c'è un'utilità — ma solo in senso strettamente pragmatistico — nello sforzo di distinguere vari aspetti per esaminarli e fissarvi sopra l'attenzione uno per volta, per quanto possibile.

6) *Specializzazione e incomprensione.*

La tendenza alla creazione di compartimenti stagni viene in genere collegata — e così apparentemente giustificata — alla necessità della specializzazione, sempre più ovvia col crescere dello scibile in modo che ciascuno può dominarne solo una piccola parte, ed essere in grado di apportare contributi personali solo in una parte piccolissima nella quale potrà seguire la letteratura e impadronirsi dei metodi concettuali o sperimentali per proseguire.

L'argomento, però, non regge. Non si può escludere che esista qualche specialista così isolato nel suo lavoro da poter considerare solo l'aspetto che lo occupa delle questioni in gioco, ma sarebbe un caso patologico. In genere lo specialista di un campo deve ricevere stimoli, ben precisi o magari inconsapevoli, da altri campi, e le sue capacità come specialista dipendono anche dall'insieme più o meno indistinto di tutte le sue conoscenze in campi vicini o lontani al suo. Ma poi, comunque sia di ciò, la specializzazione potrà essere una decisione o una sorte successiva di un individuo, al quale, a tutti i livelli, è doveroso insegnare ciò che gli sarà utile e istruttivo qualunque carriera scelga tra quelle cui al momento può avere accesso (e possibilmente gli serva comunque come uomo intelligente). Guai insegnare a un individuo ancora incontaminato con la mentalità deformata — vorrei dire settaria — dello specialista; se tale individuo ascolta due insegnanti con tali visioni antitetiche e parziali mi sembra risulti disgustato e perso per entrambi.

Ciò dico in particolare per un'obiezione che mi è capitato di sentire circa una differenza radicale di mentalità fra il matematico e il fisico o cultore di altre scienze. Se c'è, penso sia un difetto di comprensione, una mancanza di equanimità, una colpevole unilateralità da entrambe le parti o almeno da una parte.

La matematica è un linguaggio per esprimere esattamente ogni idea o fatto, e in particolare le idee e i fatti di cui si occupano le altre scienze. Non possono sorgere conflitti di competenza o di mentalità e d'altro genere a meno che qualcuno non voglia assumere posizioni irragionevoli che ricadrebbero a danno esclusivamente della propria disciplina, in quanto ne verrebbero a negare la ragion d'essere e la ragione di farla studiare.

II) *Metodi e obiettivi dell'insegnamento nella scuola media.*

1) *Generalità.*

Penso che si debba tener conto massimamente, nel fissare tali metodi e obiettivi, di due ordini di considerazioni:

— le caratteristiche ed esigenze dei ragazzi di età 11-14 anni quali risultano dagli studi dei pedagoghi e dalle esperienze avanzate in materia di insegnamento (ad es., per la matematica, ad opera di Emma Castelnuovo),

— la funzione della scuola nei riguardi di coloro che con essa concluderanno gli studi e di quelli che li proseguiranno.

Tutto concorre ad indicare tassativamente una finalità formativa aperta, cioè intesa a:

— dare un'idea panoramica vasta e organica (benchè rudimentale) di ciò che «verrebbe dopo»,

— darla in forma attraente, con metodo attivo, in modo da suscitare interesse e un inizio di intima comprensione,

— inserire le poche (o comunque non molte) «nozioni obbligatorie» da apprendere, come capisaldi di questa visione panoramica e non come scorie scolastiche,

— dare così una base adeguata per far valutare a ciascuno la propensione a proseguire gli studi dedicandosi a questo o quel campo, e all'insegnante per confortare e orientare in tale scelta,

— dare una solida sensazione della struttura unitaria del sapere, delle fondamentali interconnessioni, in modo da immunizzare anche per il futuro dalla frammentarietà di visioni settoriali unilaterali che potrebbe derivare dall'inevitabile guaio della separazione tra i diversi insegnamenti negli studi più avanzati della scuola,

— dare a chi non prosegue gli studi una visione abbastanza soddisfacente e in un certo senso completa, appunto perchè aperta e non intesa come qualcosa di chiuso e completo nella sua inevitabile pochezza.

2) *Le materie scientifiche e le altre.*

Quanto sopra dovrebbe valere, secondo il mio avviso, per tutte le materie d'insegnamento, anche quelle non scientifiche sulle quali non credo di poter insistere. Tuttavia, per chiarire senza pretese il mio pensiero, spero che gli stessi termini di «Educazione» artistica, musicale, ecc. escluderanno la pretesa di far imparare date e classificazioni e imporranno di avviare a «vedere» un'opera d'arte e «capire» i problemi e la personalità di un artista, apprezzare il patrimonio artistico e la funzione culturale di esso e della sua conservazione (inclusa la tutela del paesaggio, degli alberi e via dicendo). Così per la lingua straniera e la «introduzione al latino» della 2ª classe, occorrerebbe arrivare all'essenziale (capire e farsi capire, risp. trovare alcuni degli ausili principali per comprendere fatti dell'italiano attraverso la derivazione dal latino) escludendo pedanterie grammaticali. Un cenno a parte va fatto per le «Applicazioni tecniche», sia perchè un collegamento con l'insegnamento di materie scientifiche può risultare di grande reciproco vantaggio, sia perchè dovrebbero correggere l'impostazione eccessivamente intellettualistica di tutta la scuola e particolarmente per quasi tutta la scuola italiana. Le deficienze, anche culturali, derivanti dal mancato sviluppo di attività manuali concrete, sono ben note e gravi; in molti paesi (p. es. USA e URSS) ci si preoccupa molto di ovviarvi, e benchè vi sia stato fatto molto, pare che sembri ancora non abbastanza. È un aspetto che è auspicabile venga curato con molto impegno, anche da parte dei cultori di scienze e degli insegnanti di materie scientifiche in particolare, che potranno render concreti vari punti del loro insegnamento traendo lo spunto da lavori manuali degli allievi, o indirizzare il collega insegnante di « Applicazioni tecniche » in modo da accrescere il valore di apertura scientifica implicito in ciò che fa e fa fare.

3) *Le materie scientifiche.*

Per dire *come si dovrebbe studiare* specialmente nelle età di cui ci occupiamo, vorrei semplicemente riprodurre il paragrafo appunto così intitolato (a pp. 31-37) del capitolo « La scuola dell'onniscenza » (articolo su « Il Mondo », 13 sett. 1955) nel volume di Guido Calogero « Scuola sotto inchiesta », Einaudi, 1957. Ivi si parla con esemplificazioni appropriate e convincenti di tutte le materie, ma, per entrare e rimanere nell'ambito che particolarmente ci concerne, basti riprodurre l'essenziale di ciò che egli dice a proposito dell'insegnamento concernente le scienze. Nel seguito intendo precisamente sviluppare quelle idee cercando di individuare le modalità migliori per tradurle in realtà.

Egli attacca « l'ossessione enciclopedistica secondo cui le conoscenze dei giovani dovrebbero essere senza buchi (in corretto linguaggio scolastico questo ideale da formaggio parmigiano si chiama « preparazione senza lacune »), e indica chiaramente il da fare anche per il nostro caso: « Se insegnate matematica e fisica e scienze, non intestatevi a inculcare compendi sistematici di tali scienze o di certe loro sezioni... Scegliete una cosa qualunque che possa interessare i giovani... fate loro vedere quante soluzioni di problemi... quante creazioni di strumenti mentali... si sono dovuti poco a poco mettere in atto per raggiungere quei risultati di dominio tecnico della realtà ». I giovani devono « capire qual'è la presa del calcolo sulle cose » per diventare « *colti rispetto alla scienza* » cioè « *capire qual'è il tipo di mestiere che fanno gli scienziati e i tecnici... potere meglio accertare se esso attira il loro gusto più che altre attività... o almeno non lo temeranno come pericolosa stregoneria* ».

Non si potrebbe dir meglio! E stupisce che questa visione, questa preoccupazione, questa prospettiva, provenga da un illustre e acuto pensatore che per quanto mi consta non si è mai espressamente occupato di problemi scientifici. E invece è forse naturale che idee del genere vengano a chi non è accecato da deformazioni professionali: lo vedremo ad es. in una citazione di Bontempelli relativa all'insegnamento della matematica.

4) *Fusione o separazione?*

Alcune riflessioni preliminari — e poi altre riflessioni conclusive — saranno opportune, per integrare la parte esemplificativa e le proposte più o meno concrete in fatto di criteri didattici. Per realizzare gli intendimenti delineati, l'ideale sarebbe insegnare tutto quel che si riterrà opportuno senza far apparire che esistano differenze o confini tra parti dei ragionamenti appresi, senza dire o almeno senza sottolineare che tali parti hanno nomi speciali e cultori specializzati (come matematica, biologia, spettroscopia, statistica, acustica, ecc.). Salvo norme intese ad assicurare un certo equilibrio ed un «minimo comune denominatore», l'ideale sarebbe pertanto che in ogni ora lo sviluppo delle discussioni portasse inavvertitamente a imparare un po' di tutto e a vedere sempre le connessioni che di tutto fanno «un tutto» effettivamente. Ciò vorrebbe dire (al limite) non solo non separare *la persona* (ad es. dell'insegnante di matematica e di fisica), ma *neppure le ore*. Se ciò sembrasse troppo (e lo è, se non si riesce a formare insegnanti pienamente rispondenti alla figura ideale che sarà delineata dai cenni ulteriori), rimarrebbe la raccomandazione di dedicare di preferenza le ore di «matematica» prevalentemente allo sviluppo di aspetti più matematici delle questioni incontrate, e le ore di «osservazioni» agli aspetti fisici, naturalistici, ecc., senza però mai spezzare la connessione mentale e logica o la visione unitaria dei problemi nel loro insieme.

Si potrà obiettare, non senza fondamento, che il modo di procedere prospettato e che sarà meglio delineato da esemplificazioni concrete nel prossimo paragrafo (e in Appendice), se da una parte sottolinea le connessioni tra i vari aspetti di un problema, fa perder di vista la connessione strutturale interna di ogni singola particolare disciplina o teoria. Non sarebbe certamente giustificato ritenere trascurabile questa opposta esigenza: in effetti si tratta solo di discutere quale sia preminente, in generale e agli effetti specifici dell'insegnamento (specie in queste scuole). Pare ben fondato in generale che occorra innanzitutto comprendere e assimilare il contenuto sostanziale, pratico, dei concetti, e i motivi da cui la loro necessità scaturisce, perchè soltanto dopo di ciò e in seguito a ciò può sorgere un interessamento, nonchè una utilità nel senso di economia di pensiero, al problema ulteriore di coordinarli logicamente tra loro. Seguire la via inversa sembra del tutto innaturale, come la pretesa di insegnare i movimenti del nuoto prima che uno abbia mai visto l'acqua: le nozioni apprese come astrazioni vuote e gratuite non si potranno mai più correggere e vivificare riempiendole di tutti quei significati concreti che ne fanno « astrazioni » valide, astrazioni nel senso creativo e illuminante del termine, cioè astrazioni in cui di molte realtà si conserva « tutto quel che serve sotto un certo aspetto », e non nel senso funesto di astrazioni in cui non resta nulla o forse non c'è e non c'è mai stato nulla.

Perciò e specie quando si ha da fare con ragazzi e occorre fare attenzione a educarli e non traviarli, l'esigenza di pensare a una certa sistemazione (o a un primo avvio a una certa sistemazione) *entro* le dottrine particolari deve venire gradualmente e piuttosto tardi, cioè quando si possiedono già molti elementi e nozioni di cui si intravvedono legami che rendono chiara la maggiore utilità e significatività che essi possono trarre da un tentativo di miglior sistematizzazione.

Un collega (P. Luzzatto-Fegiz) con cui parlavo giorni fa di questi problemi (cercando di sentire la sua opinione prima di manifestargli quale fosse la mia) espresse questo concetto così: « L'astrazione inculcata dal di fuori non vale assolutamente niente; bisogna che ciascuno ci arrivi da sè ». Non è certo una affermazione nuova, ma mi è piaciuto sentirla rispuntare, non come citazione, ma come convinzione di persona di cui difficilmente potrei trovare l'eguale per larghezza di vedute, per versatilità di preparazione e d'interessi, per indipendenza di giudizio.

5) *Precisazioni sul metodo didattico auspicabile.*

Guido Calogero, nel brano citato nel paragrafo 3), indica anche un esempio di come tradurre in pratica le sue idee nel caso specifico dell'insegnamento di materie scientifiche. « Se insegnate matematica o fisica o scienze, sceglięte una qualunque cosa che possa interessare i giovani » — egli raccomanda, come già avevamo riportato, ma poi prosegue — « che so io, il motore di un'automobile, o un apparecchio radio o di televisione, o il progetto di un ponte di cemento armato o di una casa moderna; e a poco a poco fate loro vedere, durante un intero anno, attraverso esercitazioni e ricerche fatte in comune e senza che mai o quasi mai essi debbano studiare nulla a casa, quante soluzioni di problemi di fisica, di chimica, di geometria, di algebra, di trigonometria, quante considerazioni di interessi pratici e quante creazioni di strumenti mentali atti a soddisfarli si sono dovuti poco a poco mettere in atto per raggiungere quei risultati di dominio tecnico della realtà. Fate uscire la matematica da quel motore, e non da Euclide! Allora e soltanto allora i giovani cominceranno veramente a capire qual'è la presa del calcolo sulle cose ... ».

Pur condividendo appieno il concetto informatore, è abbastanza naturale che, chi debba pensare effettivamente a tradurlo in pratica, debba riflettere meglio e in dettaglio alla sua applicazione e applicabilità. L'inconveniente della procedura proposta è che, volendo occuparsi in modo approfondito di un unico tema, si incontrerebbero di necessità molti problemi troppo difficili e magari marginali rispetto alle finalità istruttive, e rimarrebbero fuori altre cose che per vari motivi dovrebbero non restare ignorate. Inoltre, nonostante la varietà degli aspetti via via esaminati, il seguir sempre un unico filo conduttore farebbe perdere il gusto dell'imprevisto e renderebbe faticoso lo sforzo di conservare vivi l'attenzione e l'interesse. Un tale compito è adatto (come avviene) per tesi di laurea in ingegneria, e non può essere affrontato che male se uno non possiede già nelle grandi linee la preparazione di un laureando di ingegneria.

Ma si può procedere in modo anologo, secondo i medesimi concetti, seguendo anzichè un'unica linea una successione di « occasioni » o « pretesti » o « spunti », da scegliere in modo più o meno casuale o apparentemente casuale, e che siano suscettibili di dar luogo a riflessioni e « scoperte » in varie direzioni, alla formazione di concetti che spesso capiterà di riincontrare più volte, all'intuizione spontanea di elementi comuni che renderanno attesa la rivelazione di qualche teoria che li coordini. E allora la parte maggiore del tempo sarà dedicata allo studio integrato di vari problemi sotto i vari aspetti che suggeriscono e che siano accessibili, secondo una traccia che in gran parte si potrà sviluppare automaticamente per associazione di idee o di curiosità derivate. Sarà bene seguire, se possibile, curiosità suscitate spontaneamente nei ragazzi, purchè l'insegnante sappia incanalarle in un qualunque tipo di discussioni costruttive, altrimenti si procederà secondo schemi preordinati dall'insegnante secondo tracce dei testi adottati. Delle caratteristiche di libri destinati a tale forma d'insegnamento, si dirà tra breve. Dopo tale parte preponderante del compito scolastico, si giungerà gradualmente, mano mano che se ne presenta l'occasione, a riordinare le idee su gruppi di cose affini in qualche schema logico o sinottico che aiuti a creare collegamenti di questo tipo a questo momento utili benchè ritenuti dannosi all'inizio.

6) *Libri di testo.*

Per non appesantire eccessivamente la presente esposizione, e per poter sviluppare senza eccessive preoccupazioni di spazio alcune esemplificazioni concrete, di ciò sarà detto in un'Appendice. Chi volesse farsi un'idea più dettagliata del senso di ciò che sarà detto qui in forma alquanto riassuntiva e generica, dovrebbe leggere tale appendice; qualche breve richiamo sarà premesso perchè il senso delle indicazioni che stiamo per dare sia nell'insieme afferabile anche senza tale lettura.

La difficoltà della via indicata — casuale, occasionale, non sistematica, avventurosa, ma che deve risultare costruttiva — risiede nel rischio che una discussione troppo «spontanea» risulti inconcludente, e che un insegnante, anche bravo e preparato, non possa trovare su due piedi i possibili spunti e sbocchi costruttivi che la discussione di un certo problema potrebbe offrire. Occorre un qualchecosa che possa servire di guida, a studenti e insegnanti, per trovare vie promettenti secondo cui proseguire le discussioni, spontanee, ma difese dal perdersi in cose oziose o sterili o troppo astruse o dal passare davanti a qualcosa d'importante senza notarne l'esistenza.

Questo qualchecosa non può essere, in primo luogo, altro che un libro (senza escludere altri dispositivi, certo meno immediati). Ma non un libro di testo nel senso convenzionale del termine: un libro da cominciare dal principio e terminare alla fine, senza saltare nulla salvo eventuali paragrafi con l'asterisco, perchè tutto è graduale e collegato. Dev'essere, al contrario, un libro da poter utilizzare secondo l'estro della fantasia e della curiosità e secondo il meccanismo casuale delle associazioni di idee e di natura tale da rispondere in modo atto a correggere o eliminare, nella concatenazione delle risposte, il carattere più o meno incoerente della successione delle domande.

È possibile inventare una cosa del genere? Direi che non è necessario inventare nulla, ma basta adattare meglio a scopi più particolari e alle esigenze di menti meno sviluppate e preparate quei procedimenti che servono meglio in ogni genere di ricerca. I metodi cioè che consistono nel risalire, di citazione in citazione, da un articolo a un altro, da una voce di enciclopedia a un'altra; del resto anche attualmente viene chiesto qualche volta agli studenti di cercare notizie bibliografiche o informazioni per conto proprio, e per quanto mi consta, è in tali occasioni che essi prendono un maggiore interesse all'argomento. E molte enciclopedie per ragazzi costituiscono, meglio che i testi ufficiali, un incentivo all'interessamento dei giovani.

Basta pertanto studiare i perfezionamenti che si possono e devono apportare a una pubblicazione di struttura analoga al fine di renderla più espressamente rispondente ai requisiti didattici auspicati. Nulla da cambiare quanto a forma d'impostazione: dovrebbe trattarsi di una raccolta di «voci», di ampiezza media (p. es. una pagina) e formulazione piana e chiara, non appesantita né da uno sforzo di concisione nè dal desiderio di dir troppo; ogni voce dovrebbe risultare indipendente dalle altre, nel senso di essere comprensibile senza esigere la preventiva lettura di altre; sarebbero però indicati tutti i riferimenti a voci la cui lettura possa giovare, sia a meglio vedere i presupposti, sia a trovare ulteriori sviluppi, sia a riscontrare analogie e contrasti, e via dicendo. Ma l'elemento nuovo ed essenziale per l'impiego didattico sarebbero delle «voci» aventi il carattere di «esempi» da prendere come «spunto»; di per sè sarebbero voci come tutte le altre, ma la loro funzione sarebbe di servire soprattutto per stabilire e suggerire quei collegamenti tra aspetti diversi su cui può venire attratta l'attenzione partendo da un qualunque problema da discutere.

Per accennare di sfuggita, almeno a una delle esemplificazioni che verranno sviluppate nell'Appendice, la semplice considerazione dell'*equilibrio* di un *tavolo* può condurre a porsi molti problemi e scoprire molti concetti e molte proprietà, come, per dirne alcuni pochi, involucro *convesso*, *omotetia*, *baricentro*, e derivati, problemi di calcolo *combinatorio,* di logica sul *possibile,* a costruzioni di *diagrammi* di *funzioni,* ecc. ecc. Se la voce TAVOLO espone la situazione e delinea il complesso di domande che si potrebbe e dovrebbe essere indotti a porre per rendersi conto di vari aspetti, le risposte potrebbero ivi essere assai schematiche rinviando, per spiegazioni che ne rendano più esplicito il senso, alle voci corrispondenti, di volta in volta, a uno o più tra gli altri termini indicati in *corsivo.* Inversamente, ciascuna di queste voci farebbe riferimento a *tavolo* e ai vari altri nomi di voci utilizzabili come esempi; così, se ad es. uno parte dal voler imparare o ripassare cosa sia il baricentro troverà anche tutti gli esempi atti a chiarirglielo, o l'insegnante che desiderasse spiegare questa stessa nozione potrebbe scegliere fra gli esempi quello che ritiene più rispondente al suo gusto o a quello degli allievi per avviare una discussione. Così si possono poi accostare diversi esempi per rilevare analogie e differenze; si può prolungare una discussione per associazione di idee e curiosità casuali passando da un problema a una nozione e da questa ad altri esempi e da questi ad altre nozioni; si può tornare senza parere su una nozione già incontrata per controllare se è stata appresa abbastanza bene, ad es. per applicarla intelligentemente a un problema nuovo, e altrimenti ribadirla con altri esempi; e così via a volontà, sempre valendosi del reticolo dei riferimenti.

E vorrei aggiungere che la struttura di un tale libro, con argomenti o voci in un certo senso slegate ma in un altro ben connesse in mille modi con molte altre (ed anzi, più o meno indirettamente, con tutte le altre), dà una buona immagine di quella struttura mentale che si vorrebbe creare, negli allievi e prima negli insegnanti di queste scuole: un tutto organicamente sviluppato (a un livello elementare o più ricco secondo i casi), per contrasto coi brandelli in cui viene spezzato quando si vuol presentarle in un certo numero di semplici schemi unidimensionali (libri da leggere dal principio alla fine).

Per rispondere anche all'esigenza finale di ricostruire una certa concatenazione sistematica, tipo « compendio », a scopo di riepilogo e di coordinamento e di consolidamento mnemonico-concettuale, il libro dovrebbe concludersi presentando degli « itinerari », tali che, ripassando un certo numero di voci nell'ordine suggerito, si ottenga quasi un equivalente di un testo normale (anzi di molti per ogni disciplina, dato che gli itinerari potrebbero esser molteplici, sul medesimo libro, a seconda di diverse impostazioni concettuali o prevalenze di interessi, ecc.).

7) *Come ottenerli?*

Un problema difficile si presenta subito se ci si chiede chi e come potrebbe accingersi a preparare un testo del genere. Probabilmente nessuno sarebbe in grado di farlo, nè, se sapesse, sarebbe disposto a farlo. Tuttavia dovrebb'esser abbastanza facile metterlo assieme con un lavoro in collaborazione, dato che si tratterebbe di scrivere delle voci in certo senso staccate. Però occorrerebbe pur sempre uno stretto contatto e una notevole uniformità di criteri: occorrerebbe infatti che chi segua i riferimenti trovi sempre trattazioni concordanti come tono, livello, terminologia, e innanzitutto occorrerebbe preliminarmente tracciare il piano completo delle voci e degli esempi connettivi con le rispettive connessioni.

Per precisare tale tessuto preliminare si dovrebbe procedere più o meno in questo modo. Dovrebbe esser stabilito di già l'insieme minimo di nozioni prescritto (nei programmi, o come loro interpretazione più o meno autorizzata) quale « minimo comune denominatore obbligatorio »; in base a ciò si potrebbe cercare un insieme di esempi ricchi di sviluppi e significativi, tali che ogni nozione obbligatoria s'incontri in parecchi esempi di natura possibilmente svariata e che la chiariscano ciascuno sotto una luce diversa, benchè naturalmente concorrente a formarne una visione unica coerente sebbene arricchita di sfumature. Naturalmente, per economia di esempi e per l'avvicinamento tra i vari concetti, saranno da preferire esempi che servono simultaneamente a illustrare parecchie delle nozioni obbligatorie, ed altre raccomandabili per la parte integrativa o facoltativa. Si potrebbe allora controllare quali nozioni « facoltative » sono presenti, vedere quali altre sembrerebbe opportuno aggiungere per un certo criterio di equilibrio e completezza, e quali esempi per coprire adeguatamente queste estensioni e arricchire i riferimenti a nozioni precedenti.

Sorvolo su difficoltà contingenti, come mole di un volume unico o spezzamento in più volumi; in tal caso si potrebbe pensare a suddivisioni un po' sistematiche (argomenti affini che limitano la frequenza di riferimenti tra volumi diversi, p. es.

I. Matematica e meccanica, II. Resto della Fisica e Chimica, III. Biologia, ecc.; oppure argomenti occorrenti nel I anno, nel II anno e non nel I, nel III e non nei primi due), ma probabilmente la cosa più semplice sarebbe la divisione alfabetica come per ogni opera tipo Enciclopedia.

Un ultimo suggerimento che mi sembra importante, subordinatamente alla preparazione di un siffatto libro per gli studenti. Per uso degli insegnanti sarebbe utile, e direi quasi essenziale, la preparazione di un libro parallelo a questo, che per ogni voce esercizio fornisca in modo succinto le stesse indicazioni con formulazioni più approfondite, con trattazioni matematiche più elevate, con ulteriori osservazioni intese vuoi a ravvivare o integrare le conoscenze che si suppongono in possesso degli insegnanti, vuoi a dare consigli di natura didattica sul modo di condurre la discussione con gli allievi, sui punti delicati da sottolineare, sugli errori e malintesi prevedibili da prevenire e correggere, ecc. (I testi in uso in URSS — pur del tipo consueto — contengono o sono seguiti da istruzioni didattiche per il loro impiego da parte degli insegnanti; sembra però che le indicazioni siano ivi intese in senso rigido e tassativo anzichè come consigli che lasciano ampia libertà di scelta e svolgimento di argomenti).

8) *Sull'opportunità di precisare i «programmi».*

È stato rilevato che i programmi, nella loro attuale formulazione, sono molto vaghi. Se, da un lato, ciò ne costituisce il precipuo pregio (consentendo larghe possibilità di esperienze e interpretazioni, da cui solo potrà uscire una conclusione non affrettata), resta l'esigenza che, almeno come prassi o come intesa di massima, esista una linea direttiva che tolga i singoli insegnanti dal dubbio di fare ed esigere troppo poco o invece di strafare ed esagerare nelle pretese.

Probabilmente sarà possibile e opportuno consentire anche in via definitiva una certa libertà, come possibilità di scelta fra diverse «interpretazioni» dell'estensione della materia, fermo restando, direi, il criterio generale. E comunque, anche all'interno di ogni ammessa interpretazione, sarebbe opportuno un largo margine di libertà nella scelta e nello sviluppo di vari argomenti, fermo restando soltanto un «minimo» obbligatorio (come già detto parlando del modo di formare il testo, v. paragrafo precedente).

La questione dell'eventuale precisazione del modo (o dei modi) in cui si possa interpretare concretamente il programma costituirà comunque oggetto di lunghe discussioni tra specialisti di ogni singola disciplina dapprima e tra le varie discipline poi per opportuno coordinamento. Sarebbe prematuro e presuntuoso voler anche iniziare qui tale discussione.

Vorrei solo accennare ad alcune questioni che potrebbero probabilmente costituire motivo di dissenso tra i matematici, riguardo agli argomenti da includere nel « programma » (meglio, programma *minimo*) di Matematica. E forse qualche commento preventivo può evitare malintesi o almeno contribuire a rendere reciprocamente chiare le posizioni.

Ho l'impressione che anche riguardo al programma per questa scuola si presenterà un dissidio fra i fautori di impostazioni « nuove », « moderne », per intendersi più agevolmente « bourbakiste », e fautori di impostazioni tradizionali che nel caso presente potrebbero anche essere semplicemente fautori di un insegnamento elementare e pratico per cui non si arrivi neppure a porre il problema.

La precisazione che vorrei fare è che è opportuno distinguere vari aspetti, per non cadere in polemiche confuse, e soprattutto due: l'opportunità o meno di introdurre certi concetti (come quelli menzionati), e l'opportunità o meno di introdurli nel modo astratto assiomatico-formalizzato usato nei testi Bourbaki destinati ai matematici (o modo simile).

Si possono avere infatti non due ma quattro atteggiamenti possibili; per dirla schematicamente:

argomenti classici - svolgimento astratto-logico

argomenti classici - svolgimento pratico-intuitivo

argomenti moderni - svolgimento astratto-logico

argomenti moderni - svolgimento pratico-intuitivo.

Io per esempio non so se sono o no in disaccordo con amici che propendono per il bourbakismo; io non sono affatto contrario a includere nei programmi quelle nozioni bourbakiste che si prestano ad essere introdotte in base ad esempi intuitivi e che effettivamente riescono utili; sono contrario all'impiego di metodi sistematici deduttivi di trattazione qualunque ne sia il contenuto (Euclide e Bourbaki o « regola del tre » spiegata con pompose pedanterie). Beninteso, nel contrapporre intuitivo a logico intendo solo dare la precedenza all'acquisizione intuitiva del senso o scopo dei concetti per avviare dopo la comprensione logica, non limitarmi all'intuitivo; nell'esprimere favore per concetti nuovi, intendo ciò caso per caso a ragion veduta, e non per accettazione in blocco di tesi preconcette.

9) *La didattica della matematica.*

Per chiarire che non c'è dissenso, se la questione sta nella introduzione di certi concetti, dirò che ho trovato molto appropriati i cenni in cui incidentalmente Emma Castelnuovo, con riferimento ad esempi concreti applicativi, ha accennato a nozioni come « funzione », « struttura », « algebra di Boole » ecc. (in *I numeri*, ed. La nuova Italia, Firenze). E sono convinto che, volendo, si potrebbero opportunamente moltiplicare o sviluppare maggiormente cenni del genere, ed anche sottolineare l'importanza che i concetti così spiegati assumeranno in molte questioni. Tutto ciò è istruttivo.

Sarebbe invece distruttivo introdurre linguaggi tecnici e formalismi astratti o qualunque altra cosa senza creare alcuna visione o interpretazione intuitiva o concreta che vi corrisponda. Cambiare i concetti conta poco se non si guarisce la mentalità che fa consistere la matematica soltanto in quel niente che resta se per amore della purezza si vuol trasformare uno strumento possente in quanto abbraccia tutto in una parvenza di strumento fatto di vuoto o funzionante nel vuoto.

Difetto antico che non c'era bisogno di peggiorare, ma di sradicare; è colpa dei matematici e non della matematica, se essa è giustamente odiata dalla maggior parte delle persone, che non hanno avuto occasione di apprendere che la matematica è tutt'altra cosa da quella che viene propinata a scuola. Sull'esigenza di introdurre altri concetti per l'insegnamento della matematica, giovino come testimonianza le seguenti citazioni.

Massimo Bontempelli: Tutti coloro che si credono più o meno artisti, si fan vanto di avere avuto zero in matematica fin dalle prime classi. Al quale proposito ho avuto modo di osservare che in questa incomprensione verso la matematica la gente è spesso sincera, ma mi sono anche convinto che *la colpa è sola-*

mente del modo con cui la matematica è insegnata. Il difficile non è capire la matematica, è farla capire; chi si dedicasse per qualche tempo alla specialità «pedagogia della matematica» o creasse una didattica delle scienze esatte farebbe opera utilissima. Capìta, diventerebbe per ogni scolaro la più appassionante delle discipline, e soffusa di mistero».

Il biologo *Pierantoni*: «Non coltivai mai la matematica, non perchè non la comprendessi, ma perché trovai sempre una certa difficoltà a ritenere a memoria i dati che non richiedessero un certo sforzo d'intelligenza per essere compresi».

Giovanni Giorgi (matematico, elettrotecnico, autore del sistema Giorgi di unità di misura): «Al pari di molti altri, che poi si sono specializzati in matematica, provavo ripugnanza per l'aritmetica e la geometria delle scuole elementari e del ginnasio. Tutti quegli insegnamenti non potevano soddisfare una mentalità inclinata alle scienze esatte».

Estraniandosi sempre più da tutto ciò che dà significato ai suoi concetti e interesse alla sua didattica, la matematica è giunta al punto che per gli allievi ingegneri si sono voluti istituire dei corsi speciali: «Quelli per i matematici — mi disse il Preside della Facoltà di Ingegneria — sono adatti solo per i matematici; per noi ci vuole qualche cosa di diverso». Io mi permisi di esprimere il mio dissenso, di cui egli si meravigliò: «A mio avviso essi sono inadatti soprattutto per i matematici, che dovrebbero per primi interessarsi ai motivi che fanno della matematica una cosa tanto importante per tutti».

III - *Sulla preparazione degli insegnanti di Materie scientifiche.*

1) *Modalità dell'insegnamento.*

L'insegnamento nel corso di laurea in Materie scientifiche, di cui è in esame l'istituzione che dovrebbe aver luogo in seno alle Facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali delle Università regolarmente esistenti, dovrebbe venire espressamente studiato per dare — ai futuri insegnanti di materie scientifiche nella Scuola media unica — non soltanto la necessaria e sufficiente preparazione nelle varie materie che dovranno conoscere (Matematica, Fisica e chimica, Scienze naturali), ma anche la capacità didattica e la formazione umana e culturale adeguata all'espletamento di una delle più delicate e impegnative missioni per il rinnovamento della società italiana.

Come si dovranno tradurre in effettivi ordinamenti e metodi tali obiettivi di carattere generale?

Non è naturalmente pensabile di adottare per la preparazione degli insegnanti il medesimo metodo che si propone loro di seguire: è inevitabile che essi debbano seguire corsi diversi con insegnanti diversi per ogni materia (ed anzi diversi per ogni « sottomateria » di ogni « supermateria », sia che la suddivisione avvenga per anni o semestri o per ore in un medesimo periodo o con inserzione di cicli staccati di lezioni su argomenti speciali, ecc.). Tuttavia è essenziale curare ogni accorgimento perchè i diversi insegnamenti, pur impartiti da persone diverse, siano svolti in modo da creare il massimo coordinamento nella mente dei futuri insegnanti. Se dovesse rimanere in essi un'accozzaglia di materie apprese secondo mentalità divergenti, cosicchè essi risultassero portati ad insegnare la matematica come laureati in matematica, la fisica come laureati in fisica, le scienze naturali come laureati in scienze naturali, e così via, tanto varrebbe lasciar separare gli insegnamenti nella scuola media unica e affidarli ad altrettanti insegnanti specializzati.

Le modalità per questo coordinamento potrebbero essere svariate ed è difficile precisarle: sarà questo, in ogni sede che istituirà il corso di laurea in Materie scientifiche, un compito delicato e importante per gli organizzatori (Preside, Consiglio di Facoltà, docenti del corso). Si dovrà o potrà, ad es. concordare in dettaglio i programmi e gli argomenti dei corsi delle diverse materie: e addirittura coordinare lo svolgimento parallelo di argomenti identici considerati, sotto diversi aspetti; oppure ciascuno, nel proprio corso, richiamerà argomenti trattati da altri in altri corsi per prendere spunti e rilevare legami (informandosi, anche di volta in volta senza previo accordo, se e come di ciò sia già stato parlato).

Dove il coordinamento dovrebbe assumere forme più spinte è nelle esercitazioni: esse potrebbero esser fatte in comune, da assistenti dei diversi corsi, in modo che esperienze e discussioni seguano assai da vicino lo schema di interconnessione che i futuri insegnanti dovranno seguire nel loro insegnamento ai ragazzi. Anche le interrogazioni, le prove sperimentali, gli esercizi scritti, dovrebbero avere carattere globale, riguardando non singole materie ma l'insieme.

2) *Insegnamenti pedagogici e raccomandazioni pratiche.*

Un fatto senza precedenti sarebbe che in questo corso di laurea dovrebbero avere parte essenziale gli insegnamenti pedagogici, mentre fino ad oggi i futuri insegnanti di matematica, fisica, ecc., tutto dovevano apprendere tranne il modo di insegnare, di capire la mentalità dei discenti di diversa età e preparazione e interessi: corollario ovvio benchè bestiale dell'idea che la scienza è un mattone da imporre a chiunque così com'è e come deve essere, senza misericordia. Perciò, sembra si giungesse a pensare, chi sa per sè sa spiegare perchè basta dica le cose nel modo stesso che è sembrato a noi andasse bene per lui! Inutile soffermarsi sul progresso immenso che si conseguirà abbandonando concezioni così barbare, purchè — è cosa assai delicata! — si trovino e scelgano con estrema cura insegnanti di pedagogia rispondenti allo scopo (non certo rimasticatori di impostazioni dottrinarie pseudofilosofiche).

Guai ammettere influenze di sapienti capaci di dire con immensa boria vuotaggini che potrebbero far gonfiare di boria i futuri insegnanti da cui dobbiamo attendere tutto l'opposto dei difetti tradizionali della nostra scuola e del nostro paese. Al contrario di tutte le storture che fanno apparire un segno di « dignità » il trascurare tutti gli aspetti del proprio dovere che sono essenziali, per limitarsi a quelli che hanno apparenza di lustro e comportano minor fatica, andrebbero curate nei futuri insegnanti (tutti, ma intanto questi), come qualità fondamentali, tutte quelle che distinguono un rispettabile coscienzioso artigiano dallo spregevole tipo di sullodato cialtrone.

Per esemplificare in particolare, nella preparazione in questo corso di laurea (specie forse nelle esercitazioni e in esercitazioni didattiche) si dovrebbe curare che i futuri insegnanti apprendano, e si convincano di dover curare assai che i loro futuri alliévi apprendano, a mettere il massimo impegno in tutte le « piccole cose » da cui dipende se quelle « grandi » fruttificano sul serio o rimangono nel regno del vuoto e del velleitario. E cioè:

— precisione (sostanziale), proprietà ed efficacia nei *disegni*, sia alla lavagna (anche con gessi colorati), sia su carta, specie a mano libera (ma anche con l'uso di riga, compasso, curvilineo, ecc. in casi particolari);

— calcolo numerico: non arrestarsi a soluzioni con mere espressioni nei problemi, disdegnando il calcolo numerico, ma portarlo a compimento col grado d'approssimazione opportuna, e, ogni qual volta è possibile, riportare i risultati su grafici;

— grafici: uso di carta quadrettata o millimetrata, indicazioni schematiche in varia forma, orari ferroviari grafici, diagrammi di Gantt per avanzamento di lavorazioni, grafici con frecce per rappresentazione di relazioni, diagramma ternario (per es. leghe ternarie, ecc.);

— costruzione di tabelle, in varie forme per opportuna presentazione di dati numerici;

— pratica nella valutazione di grandezze numeriche (distanze, durate di tempo, numero di persone in un'aula o una piazza, o di caramelle in un vaso, di auto in un parcheggio, ecc, di intensità del traffico, di pendenza di una strada, di raggio di una curva; istruttivo fare gare con valutazioni indipendenti degli allievi entro breve tempo e successivo controllo; poi ripetizioni per seguire progressi individuali o collettivi);

— costruzione di apparecchiature didattiche, dispositivi, modelli, ad es. di superficie, di figure snodate, di cinematismi, ecc.;

— esposizione sintetica di risultati, tipo «relazione» con testo, tabelle, figure, commenti (con massima accuratezza, concretezza, precisione, penetrazione dei punti essenziali; antiretorica).

Alcune osservazioni su manchevolezze correnti mostreranno l'importanza, intrinseca ed educativa, di tutto ciò. Si vedono fare spesso figure incomprensibili, e con errori sistematici: punti angolosi nelle ellissi e in punti di massimo, flessi con curvatura che cambia segno discontinuamente (p. es. sinusoidi disegnate come successioni di archi di cerchio), tangenti di flesso che non sono tangenti, ecc. Nei calcoli, se la soluzione è ad es. $\sqrt[4]{3}$, e se essa rappresenta una grandezza (p. es. l'ascissa di un punto su un diagramma) si dovrebbe pur calcolare almeno in grossolana approssimazione il valore numerico per sentirsi soddisfatti, e invece spesso ciò si disdegna; mi è stato detto che tale difetto non sussiste solo all'Ist. Magistrale, e tale fatto mi fa pensare — contro le opinioni diffuse — che sia una scuola un po' più seria delle altre. Come opportunità nell'approssimazione: quante volte non si vedono indicare nel risultato più cifre di quante ne giustifica l'approssimazione dei dati (o di quante possano avere interesse e senso in un tipo di questioni), e quante altre volte ne vengono calcolate troppo poche in relazione a utilizzazioni successive che risultano totalmente illusorie. Usando carta quadrettata si vede spesso non tener conto della quadrettatura come utile aiuto (disegnando ad es. assi cartesiani fuori delle righe o addirittura storti o inclinati, e prendendo l'unità di misura non in relazione ai quadretti; non utilizzare — volendo ad es. tracciare un cerchio a mano libera — accorgimenti come farlo passare per i punti (0,5), (3,4) con inversioni e cambiamenti di segni; non badando neppure che una retta $y=x$ taglia in diagonale i quadratini, ecc.).

3) *Tirocinio, abilitazione, ecc.*

Se non fosse follia sperare nell'abolizione sia pur parziale di una follia inveterata, si dovrebbe auspicare che — almeno per effetto dello « stato di necessità » — si abbandonasse il macchinoso sistema di complicatissime inefficienti e controproducenti procedure per ostacolare l'ingresso nell'insegnamento delle persone a questo fine preparate e di cui si lamenta tanta scarsità. Non vorrei neppure accennare al sistema dei concorsi (abilitazione, concorsi a cattedra) perchè per il solo fatto di voler evitare termini irripetibili, mi sentirei complice di connivenza. Ma è sufficiente rammentare quanto tempo passa fra il momento in cui si ravvisa la necessità di bandirli e quello in cui, dopo la conclusione, se ne raccolgono i frutti, per dispensare dall'entrare in altre critiche.

Specie se il IV anno sarà prevalentemente (e seriamente) dedicato al tirocinio, l'esame di laurea completato da una prova di accertamento di capacità didattica dovrebbe bastare. Non entro in dettagli perchè non m'intendo di procedure burocratiche e sarei tratto a suggerire cose troppo semplici per risultare accettabili da noi benchè ritenga che altrove siano pacifiche.

So anche dell'esistenza di questioni (sperequazioni nel numero di ore fra insegnanti di diverse materie, ecc.); non le conosco e non rientrano nell'argomento, ma qualcuno dovrà preoccuparsene affinchè trovino una soluzione ragionevole.

APPENDICE

Esemplificazioni per la struttura di un libro di testo secondo i cenni dati nei paragrafi II, 6-7

Avvertenze.

Le esemplificazioni, non volendo estenderle troppo, non possono che in parte minima risultare rappresentative del testo nel suo insieme, e neppure delle singole voci. Per quanto riguarda le singole voci, il testo dovrà presumibilmente risultare un po' più allungato per renderlo più facile ed elementare (qui una certa concisione era comoda, sia per evitare a chi scrive di studiare il tono esattamente adatto ai ragazzi senza probabilmente indovinarlo per mancanza di esperienza specifica, sia per il lettore che può rendersi conto delle intenzioni con minor perdita di tempo e senza essere indotto a pronunciarsi sull'adeguatezza dell'esposizione per i ragazzi). Per quanto riguarda l'insieme, è ovvio che le seguenti esemplificazioni siano quasi esclusivamente limitate a matematica e fisica, sia perchè la fusione della matematica con le altre science (e. soprattutto con la fisica) costituisce il punto più controverso, sia perchè si tratta del campo più familiare a chi scrive. Ma rimane stabilito e va ribadito che l'intenzione di mettere in luce i collegamenti tra le diverse discipline le riguarda ugalmente tutte, nella massima misura in cui ciò sia possibile nei limiti dell'insegnamento della scuola media unica. Ad esempio, anche parlando di minerali o vegetali o animali si presenteranno questioni attinenti alla fisica o alla chimica ed anche alla matematica (p. es. simmetrie, schemi dell'ereditarietà mendeliana, questioni semplici ma istruttive di metodologia statistica, ecc.). Importante avvertenza: le esemplificazioni intendono illustrare la struttura di un libro del tipo suggerito; quanto al contenuto, non intendono affatto significare che gli argomenti trattati o menzionati debbano essere tra quelli da includere nei programmi (come «obbligatori» o «facoltativi») benchè probabilmente siano a un livello all'incirca adeguato; ogni discussione e decisione al riguardo rimane — come già detto — impregiudicata.

A titolo di curiosità, l'esempio più sviluppato (equilibrio di un tavolo) è stato suggerito da un'obiezione sulla difficoltà di fare «osservazioni» in una scuola nel centro di una città; e sarà bene tener conto di evitare argomenti che non si possono studiare senza particolari possibilità di osservazione diretta.

Si badi — infine — che per comodità del lettore l'ordine delle voci è qui quello in cui si dovrebbe andarle a cercare per seguire il filo delle considerazioni scaturenti da tale esempio del tavolo, dapprima, e quindi per quelle altre a introdurre qualche concetto astratto di matematica.

Infine giova avvertire che gran parte dell'efficacia delle spiegazioni dovrebbe derivare da un abbondante impiego di espressive figure, che non valeva la pena di eseguire per la presente esemplificazione (e solo a volte ne è fatto richiamo nel testo).

* * *

Avvertenza (come si troverebbe nel volume) per i riferimenti:

Le parole che nel testo di una voce sono scritte in MAIUSCOLO sono il titolo (o la parola-chiave del titolo) di altre voci che possono essere utilmente consultate in nesso all'argomento; se la consultazione è suggerita come necessaria, alla parola in maiuscolo è fatta seguire una (v.) («vedi»), (v!) se il rinvio è particolarmente importante.

TAVOLO (esempio di EQUILIBRIO, e problemi diversi).

Si abbia un tavolino normale, a quattro gambe (poi considereremo anche il caso di più gambe) col ripiano di forma qualunque (p. es. rettangolare, rotondo, ellittico (ELLISSE), ecc.) ma comunque alquanto «sporgente» rispetto alle gambe. È chiaro che caricandolo di un peso abbastanza grande in posizione «sporgente», il tavolino si ribalterà (fate delle prove, se non ne avete già esperienza: anzi fatele con cura in modo da poter verificare le conclusioni indicate nel seguito, o quantitativamente, o almeno qualitativamente).

a) Il BARICENTRO (v!) deve stare (in verticale) entro il rettangolo d'appoggio (quello coi vertici nelle estremità delle gambe; è indifferente, poichè conta solo la verticale, pensarlo o disegnarlo sul ripiano). Verifica: se il peso del tavolino è trascurabile rispetto al carico, bisogna collocare questo entro il rettangolo d'appoggio.

b) Più esattamente, se il peso del tavolino non è trascurabile o comunque si vuol tenerne conto, il baricentro complessivo C è il baricentro della massa del tavolino (il cui peso si indichi con a) posta nel suo baricentro A, e del carico (di peso b) nel punto B (B è il baricentro del carico, o il punto ove è il carico, se questo si immagina concentrato in un punto: si noti che si può sempre, senza alcun errore, a questo effetto, immaginarlo concentrato nel baricentro). Perciò, detta $c = a + b$ la massa complessiva, è $cC = aA + bB$ (ossía C è sul segmento AB e lo divide in modo che le distanze di C da A e B siano inversamente proporzionali ai pesi a e b: $a . AC = b . BC$). Perchè C cada entro il rettangolo d'appoggio basta che il carico sia in un punto B *non troppo fuori* da esso. Si verifichi che, precisamente, per quanto detto, la regione ammissibile si ottiene ingrandendo il rettangolo d'appoggio nella proporzione da b a $a + b$, ossia da 1 ad $1 + a/b$, con centro in A (OMOTETIA (v.), PANTOGRAFO).

c) Si noti: quanto detto sopra vale per un tavolo con un qualunque numero di gambe, sostituendo al «rettangolo» d'appoggio il «poligono d'appoggio», definito in generale come involucro CONVESSO (v!) dei punti d'appoggio. (Nota: ciò vale anche se si pensa non alle gambe come terminanti in un unico punto, ma considerandone tutta la sezione di appoggio o qualunque altro caso). Riflessione importante: se il baricentro è fuori del poligono d'appoggio è anche fuori da un lato di esso (o, in generale, fuori da una retta radente al suo contorno); ribaltandosi il tavolino attorno a una tale retta il baricentro si abbassa: perciò il ribaltamento avviene; se il baricentro è dentro, ciò è impossibile, ed in compenso esiste una distribuzione dei pesi fra le gambe che fa equilibrio: ciò illustra bene l'equivalenza delle due diverse caratterizzazioni dell'involucro convesso.

d) Come si ripartisce il peso tra le zampe? Se supponiamo perfettamente rigidi il tavolino e il pavimento (tavolino non elastico, pavimento non cedevole), poichè è impossibile che gli estremi delle quattro zampe siano perfettamente su un piano, soltanto tre appoggeranno sul pavimento e la quarta sarà un carico appeso sotto il ripiano. Benchè l'ipotesi di assoluta rigidezza sia irrealizzabile, la difficoltà di una sufficiente esattezza nel fare uguali le zampe è sufficiente a far verificare sulla maggior parte dei tavolini reali che le zampe portanti sono tre per volta (e ciò vale anche per più di quattro zampe). In ogni istante, per ogni situazione di carico, funziona quindi solo un triangolo d'appoggio; spostando i carichi si passa da un triangolo all'altro utilizzando nell'insieme, un pezzo alla volta, tutto il poligono d'appoggio. Avrete notato spesso che un tavolino a quattro zampe oscilla su una delle due diagonali; si dimostri che, se le zampe sono ai vertici di un rettangolo (o anche di un rombo) la diagonale intorno cui oscilla è quella per cui la somma delle lunghezze delle due zampe è maggiore (e la differenza tra le due somme dà il distacco dal pavimento della zampa che non poggia, ossia lo spessore del rialzo che occorrerebbe per fermare il tavolino).

e) Per un tavolino con un numero qualunque di zampe, diciamo n, quanti sono i triangoli d'appoggio possibili? Notare: la domanda è ambigua finchè non si precisa cosa s'intende per POSSIBILE (v!), cioè in quale stato d'ignoranza ci troviamo o supponiamo di trovarci. Se sappiamo soltanto che le zampe sono n (escludiamo ve ne siano tre allineate!), od anche se ne conosciamo la disposizione (in pianta) ma nulla sappiamo circa le lunghezze, sono possibili tutti i triangoli con vertici in tre zampe, e tre zampe si possono scegliere in quanti modi? Sono $n(n+1)(n-2)/6$ (vedi COMBINAZIONI? o TERNE? o LOTTO?...); ad es. per $n=4$ sono 4 (infatti, basta indicare quale zampa va omessa), per $n=5$ sono 10, per $n=6$ sono 20, ecc. Però dal caso in *d*) sappiamo che per un dato tavolino a quattro zampe i triangoli *possibili* sono due soli (sono 4 in tutto finchè non abbiamo elementi per calcolare, o non possiamo constatare guardando, se sono i due divisi da una diagonale o i due divisi dall'altra).

Senza analizzare i vari casi (sarebbe un po' lungo; chi vuole può provarsi) indichiamo il criterio generale: basta considerare l'involucro convesso *del tavolino* (nello spazio; non più delle estremità delle zampe, nel piano), che si può immaginare abbastanza bene pensando alla forma che si avrebbe imballandolo con un tessuto teso, e si può definire esattamente in modo pratico come la regione che non viene mai schiacciata (vi potrebbe essere fissato ad. es. un oggetto fragile o deformabile senza che ne soffra) comunque il tavolo si facesse rotolare (anche capovolgendolo ecc.) sopra un pavimento piano. I triangoli «possibili» per un *dato* tavolino sono i triangoli che sono facce di questo involucro convesso (tra le zampe). In particolare (è ovvio, ma è istruttivo notare) una zampa che non raggiunge l'involucro convesso non è mai portante: è come se non esistesse, salvo come carico.

f) Notare il nesso con «tre punti determinano un PIANO (v.)», come per ELETTROFORO, ecc.

g) Il triangolo d'appoggio è, naturalmente, quello ove cade il baricentro, varia spostandolo (ad es. spostando un carico). Avendo solo tre zampe portanti, è chiaro come si distribuisca il peso tra di esse: proporzionalmente alle «coordinate baricentriche» del baricentro rispetto alle zampe (diagramma TERNARIO (v.) TRIANGOLO (v.), BARICENTRO (*c*) (v!).

h) Riprendendo la questione *c*), possiamo chiederci quale sia la probabilità che un carico dato, collocandolo «a caso» sul ripiano (nel senso che ad aree uguali si attribuiscano probabilità uguali), non faccia ribaltare il tavolino. Sarà data dal rapporto fra area utile e area totale del ripiano. Come varia al variare del peso del carico? (sarà più chiaro, volendolo considerare variabile, indicarlo ora con x anzichè *b*). Poichè l'omotetia era in rapporto da 1 a $(1+a/x)$, l'area della regione omotetica al poligono d'appoggio varia come (cioè proporzionalmente a) $(1+a/x)^2$, AREA (v!), e ciò vale anche per la probabilità finchè tale regione è tutta utile (non va oltre l'orlo); poi cresce di meno, nulla si può dire in generale. La regola è valida fino all'orlo quando il ripiano è omotetico al poligono d'appoggio e il centro dell'omotetia è (dire dove). Esercizio: fare il diagramma delle probabilità ($f(x) = K(1+a/x)^2$, $K =$ area pol. app./area ripiano), discuterne l'andamento e il significato (notare che, naturalmente, dove la formula dà valori maggiori di 1 il ragionamento non era valido, e la probabilità è $= 1$; spiegare!).

i) E se si tiene conto dell'elasticità? Ci limitiamo a informazioni sommarie. Il problema diventa determinato supponendo di sapere in che misura le zampe si contraggono se sopportano un peso (pressione) (ed eventualmente il pavimento cede, ecc.). Naturalmente la cosa è alquanto più complicata; questioni del genere si studiano a fondo soltanto in corsi universitari (Fac. Scienze: Meccanica Razionale; ed Ingegneria: Scienza delle Costruzioni).

ELLISSE: curva a forma di cerchio schiacciato, o visto di sbieco, ottenibile sezionando obliquamente un cono o un cilindro rotondo (fette di salame, ombra di un disco; è pertanto una delle sezioni CONICHE (v.)) Sono ellissi le orbite dei pianeti e satelliti (anche artificiali), come ha scoperto Keplero. Per disegnare un'e.; disegnare una circonferenza e, fissato un diametro, avvicinare ad esso (o allontanare) tutti i punti in una proporzione fissata a piacere; oppure sfruttare il fatto che esistono due punti (detti fuochi) rispetto ai quali la somma delle distanze è costante lungo tutta l'ellisse (si può usare un filo e due chiodini, come in figura).

BARICENTRO (o centro di gravità, o di massa): Per molti problemi è lecito immaginare tutta la massa di un corpo concentrata in un punto, perchè per riguardo a certi aspetti tutto va *come se* così fosse; tale punto si chiama b. È opportuno tener presente che se il corpo è rigido (cioè non si può deformare) il b. ha una posizione fissa rispetto ad esso, se è deformabile il b. esiste sempre, in ogni istante o posizione: nulla cambia sostanzialmente ma bisogna avvertire che la sua posizione non si può identificare con un dato punto del corpo mentre questo cambia forma. Per semplicità, ci riferiamo al caso dei corpi rigidi.

a) Sospendendo un corpo ad un filo, il b. si trova sempre sulla verticale di esso (perciò con due esperienze del genere il b. rimane determinato: è all'intersezione delle due rette; con tre e più si hanno controlli a volontà); fare esperienze. La tensione del filo fa equilibrio al peso del corpo, proprio come se fosse concentrato nel b. (mentre ciò non sarebbe vero se il b. non stesse sulla verticale: un punto pesante appeso a un filo lo tiene teso verticalmente e non inclinato o curvato per tenerlo sospeso in una posizione spostata). Vedi.. (esempi)?.

b) Consideriamo un corpo che si sostiene essendo appoggiato, e supponiamo, per semplicità, poggi su tre punti (l'esempio del TAVOLO (v.) mostra che basta sempre pensare o ricondursi al caso di tre punti). Allora il b. si trova su una verticale che passa dentro il triangolo di appoggio (quello di cui i tre punti di appoggio sono i vertici; in altre parole, il b. sta dentro il prisma triangolare mostrato nella figura. Se il triangolo è molto piccolo, abbiamo praticamente determinato una retta (verticale) come in *a*); ripetere stesse considerazioni.

c) Tenendo un corpo appoggiato su tre dita, come nella figura, se la superficie inferiore è piana, e si restringe lentamente e senza scosse il triangolo di appoggio, il corpo rimane in equilibrio e si viene praticamente a determinare il b. (se il corpo è piatto, una lastra; altrimenti comunque la verticale su cui si trova il b.). Ciò avviene perchè, momento per momento, il dito più lontano dal b. regge una parte di peso *minore* (v. punto *e* qui di seguito), ciò che rende minore l'ATTRITO (v.) allo slittamento di quel dito, cosicchè al restringersi del triangolo c'è per tale effetto automaticamente la tendenza a conservare il b. nel suo interno. Fare esperienze. Caso più semplice, per un bastone o sbarra, analoga esperienza con due dita (figura).

d) In caso di SIMMETRIA (v.) il b. deve rispettarla (naturalmente deve trattarsi di simmetria non nella sola figura ma nelle masse: una piastra circolare non ha il b. nel centro per il solo fatto di essere circolare ma ciò si può affermare se la massa vi è distribuita uniformemente, o con simmetria di rotazione, o rispetto al centro, o rispetto a due diametri, ecc). In generale, se esiste un centro di simmetria, il b. si trova in tale punto; se esistono piani od assi di simmetria, il b. si trova su tali piani od assi (e, se ce n'è più d'uno, sull'intersezione di tali piani od assi, nel qual caso è individuata la sua posizione o una retta cui appartiene). Immaginare vari casi o esempi relativi cercando oggetti per verifica sperimentale.

c) Formulazione matematica (meccanico-geometrica).

Basta cominciare dal caso più semplice, di un corpo rigido formato da due masse puntiformi (praticamente: due palline pesanti fissate alle estremità di una sbarretta rigida di peso trascurabile); non c'è poi difficoltà (concettualmente) a passare al caso generale.

Si abbiano quindi due masse, a nel punto A e b nel punto B, a distanza $d = AB$ (v. figura); dove sarà il b. Q? (ossia: in quale punto si potrebbe sospendere la sbarretta portante le due masse in modo che sia in equilibrio indifferente, mentre evidentemente spostandosi troppo verso A andrà in basso B e viceversa)?. La risposta si potrebbe ricavare dalla composizione di forze, ma si può anche stabilire con diretta intuizione da verificare con esperienze del tipo *c*) ultima frase (e figura).

È ovvio che Q sarà sul segmento AB, nel centro (per simmetria, v. *d*)) se le masse sono uguali ($a = b$) e altrimenti spostato verso la massa più grande (una bilancia pende dalla parte più caricata). E precisamente Q deve dividere la distanza d in due parti, $d = d_A + d_B$, inversamente PROPORZIONALI (v.) alle masse, cosicchè $a \cdot d_A = b \cdot d_B$ ((uguaglianza dei MOMENTI-, ...); in definitiva $d_A = db/(a+b)$, $d_B =$ idem. Il punto Q, così individuato, si può indicare sistematicamente con una notazione molto espressiva, consistente nell'indicare con aA, bB ecc. il punto A con massa a, il punto B con massa b, ecc., e con $qQ = aA + bB$ il baricentro Q delle due masse con massa $q = a + b$. La posizione di Q è quella sopra indicata, e si può anche scrivere direttamente $\frac{a}{a+b} A + \frac{b}{a+b} B$; si può anche notare che, preso comunque un punto di riferimento (o «origine», O) la notazione risulta equivalente a quella vettoriale:

$$q(Q - O) = a(A - O) + b(B - O), \qquad Q - O = \frac{a}{a+b}(A - O) + \frac{b}{a+b}(B - O)$$

(e si constati — volendo — che tale equivalenza di significati riconduce proprio queste considerazioni a quelle sulla composizione delle forze); ecc.

Analogamente per tre (o più) masse (la somma potendosi immaginare fatta in un ordine qualunque, il che significa sostituire man mano a due punti-massa il relativo b.): $qQ = aA + bB + cC$, $Q = xA + yB + zC$ con $x = a/(a+b+c)$, $y = b/(a+b+c) z = c/(a+b+c)$; necessariamente è $x + y + z = 1$.

Si noti che scegliendo opportunamente x, y, z (ossia, i rapporti tra le masse nei tre punti A, B, C) si può far assumere al b. Q qualunque posizione entro il triangolo ABC (e sui lati o vertici se una o due delle masse sono nulle). In che modo? Se il triangolo ABC è equilatero, è facile dirlo: x, y, z sono le distanze di Q rispettivamente dai lati BC, AC, AB (presa come unità l'altezza), ossia sono le coordinate (dette, per motivo ora ovvio, baricentriche) del diagramma TERNARIO (v.) (v. fig. ivi). Per un triangolo qualunque la conclusione è sostanzialmente la stessa, salvo che le «distanze» vanno prese in genere obliquamente e con unità di misura diverse (fare figura; precisamente, vanno prese parallelamente alle mediane (TRIANGOLO) e prendendo queste come rispettive unità di misura); cfr. TAVOLO *g*).

TERNARIO, diagramma: serve per rappresentare la partizione dell'unità in tre parti, ad es. la composizione di una lega o miscuglio in percentuali (in peso, o in volume, o in prezzo, ecc.) di tre componenti, la suddivisione di una popolazione in tre gruppi, ad es. per stato civile (celibi, coniugati, vedovi), o genotipi rispetto a un carattere ereditario (*AA*, *Aa*, *aa*; EREDITARIETÀ (v.)), o per risultato scolastico (allievi promossi, rimandati, respinti) o di una votazione (favorevoli, contrari, astenuti), o le probabilità in un avvenimento che dà luogo a tre risultati possibili (p. es. vittoria pareggio e sconfitta — coi simboli Sisal, 1-X-2 — in una partita di calcio), e via dicendo.

Si consideri un TRIANGOLO (v.) equilatero, e si noti che per esso le distanze di ogni punto interno dai tre lati hanno somma costante, sempre uguale all'altezza (che per comodità si assume $=1$). Il punto Q per cui le tre distanze sono x, y, z $(x+y+z=1)$ rappresenta questa partizione (p. es. la composizione per stato civile di una popolazione con percentuali x di celibi, y di coniugati e z di vedovi). Q si può anche interpretare come BARICENTRO *e*) (v!) di masse proporzionali ad x, y, z concentrate nei vertici A, B, C (v. figura).

Indicare: dove si trova Q quando sia: $x=y$?; $x>y$?; $x>1/2$?; nessuno degli x, y, $z>1/2$?; $x>y>z$?; $x=y=z$? (e in casi analoghi scambiando z, y con x, z o y, z, ecc.).

CONVESSO: insieme (corpo, figura); involucro.

(NB. - Cfr. CONVESSITA' per il significato (collegato, ma diverso) di *convesso* riferito a curve e superfici).

Consideriamo per un momento (per fissare le idee, benchè non cambi nulla) il caso dei poligoni (precisamente: le figure, o insiemi di punti, di un piano, delimitate da una linea poligonale). Guardando i due esempi nelle figure, potrete rendervi conto, in base alle spiegazioni che seguono, perchè il primo si dica convesso e il secondo no. Una prima proprietà (che, come è consueto, consideriamo la *definizione* di convesso) è che nel primo si può sempre andare in linea retta da un punto ad un altro senza uscire dall'insieme, mentre nel secondo questo non sempre avviene (ad es., sì da A a B, non da A a C). Una seconda proprietà è che il primo si può ottenere pensando di tagliare il piano lungo le intere *rette* cui appartengono i lati (con una trancia), mentre il secondo, così facendo, verrebbe suddiviso in più pezzi (tre, perchè i prolungamenti di due suoi lati lo attraversano). Una terza proprietà (che è piuttosto un diverso modo di vedere la seconda) è che, percorrendo il contorno, i lati girano sempre nel medesimo verso nel primo esempio, ma non nel secondo.

Da un poligono non convesso, è chiaro come si può ottenerne uno convesso «eliminando le rientranze» (ossia: pensando di racchiuderlo con un filo teso), e che la figura convessa così ottenuta — che si dice l'*involucro convesso* di quella di partenza — è la *minima*, nel senso che è contenuta in ogni insieme convesso che contiene la figura di partenza.

Le stesse considerazioni si possono estendere a figure piane qualunque (in luogo di poche rette-lati, occorreranno però in genere infinite tangenti per delimitarne il contorno). Partendo da un insieme con un numero finito di punti, il suo involucro convesso è il poligono di cui essi sono i vertici (tranne che riesca qualcuno interno al poligono determinato dagli altri). In questo caso è chiaro che i punti dell'involucro convesso sono tutti e soli quelli che si ottengono come BARICENTRO (v!) di masse comunque ripartite fra i vertici (ne bastano tre per volta; cfr. TAVOLO, *d*) *e*) *g*)) la proprietà vale in genere (sorvolando su sottigliezze circa l'includere o meno i punti sul contorno).

E lo stesso vale anche per insiemi di punti nello spazio (poliedri, o corpi qualunque), salvo che in luogo di lati (e rette cui appartengono) avremo facce (e piani cui appartengono); l'involucro convesso è sempre il luogo dei possibili baricentri od anche la porzione di spazio che rimane integra tagliandolo secondo tutti i piani che non tagliano (lasciano da una stessa parte) l'insieme di partenza. L'equivalenza di queste due proprietà (1ª e 2ª nella trattazione iniziale sui poligoni) è il fatto fondamentale da tener presente: come interpretazione, si rifletta su TAVOLO *e*) per il piano, ed *e*) per lo spazio). Si noti che, naturalmente, la nozione vale anche sulla retta (cioè nel caso di una sola dimensione, anzichè di due o tre come rispettivamente sul piano e nello spazio). Ivi però ha scarso interesse perchè, evidentemente, sulla retta i soli insiemi convessi sono i *segmenti* (o intervalli), e l'involucro convesso di un insieme di punti è il minimo segmento che li contiene tutti (il segmento dal primo all'ultimo punto, se esistono un primo ed ultimo punto; altrimenti il segmento tra l'ESTREMO inferiore e superiore).

Si noti infine che (sebbene salvo avviso in contrario si pensi ad insiemi convessi *limitati*) la nozione si applica anche ad insiemi illimitati (sono convessi, p. es. l'interno di un angolo convesso o di un cono, una striscia fra due rette parallele illimitata da una parte o da entrambe, un quadrante nel piano o un ottante nello spazio, ecc.).

CONVESSITÀ: di curve (diagrammi), superfici (plastici).

N.B. - Cfr. CONVESSO per il significato (collegato, ma diverso) di *convessità* riferita ad insiemi (figure, corpi, ecc.).

Si abbia un arco di curva (piana), e si considerino tutte le rette che passano per due suoi punti (ossia: le corde che ne congiungono due punti, e i loro prolungamenti). Se avviene che le corde stiano tutte da una parte dell'arco, e quindi i prolungamenti da quella opposta (e ciò avviene allora anche nel caso limite delle rette *tangenti* o radenti che toccano la curva in un punto senza attraversarla), si dice che l'arco rivolge la *convessità* dalla parte dei prolungamenti di corde e delle tangenti, e la *concavità* dalla parte opposta, cioè quella delle corde. Se ciò non avviene, può darsi che l'arco sia formato di più archi successivi per i quali il verso della convessità e concavità si inverte (uniti da punti di flesso) oppure si hanno altri casi su cui sarebbe lungo e superfluo richiamare qui l'attenzione.

Importante il caso in cui la curva interessi come DIAGRAMMA di un qualche fenomeno (ossia: di una *funzione*); allora la curva si dice *convessa* (o *concava*) se volge la convessità (o concavità) *verso l'alto*; ciò significa, per dire il fatto saliente riguardo all'andamento del fenomeno studiato, *che gl'incrementi in intervalli uguali successivi* vanno *crescendo* (concavità) rispettivamente *decrescendo* (convessità). Il caso intermedio è evidentemente quello di andamento *rettilineo* (o, come si usa dire, di linearità).

Nel caso di un pezzo di superficie possiamo fare le stesse considerazioni, ma si presentano possibilità nuove che è importante conoscere e tener presente. Un arco di curva che non contenga flessi salvo irregolarità peggiori volge sempre la convessità o da una parte o dall'altra e così può avvenire che per un pezzo di superficie (p. es. sferica o più o meno simile ad una calotta sferica) le rette che la tagliano in due punti (si pensi a spilloni infilzati in un cappello) abbiano sempre il tratto fra le intersezioni (corda) da una stessa banda e i prolungamenti dall'altra; si dirà allora che la concavità si volge verso la prima banda e la convessità verso la seconda, la quale si può anche caratterizzare dicendo che è quella su cui è possibile appoggiare alla superficie un piano (per es. una assicella). Ma può anche darsi che nessun pezzo di una superficie si comporti in questo modo: basta pensare ad una superficie a forma di sella, oppure ad una superficie tornita con un profilo concavo verso l'esterno (fig. ,,,), ed è chiaro che per quanto piccolo si prenda un pezzetto di superficie, le corde risulteranno in parte da una banda e in parte dall'altra (nella fig., quelle come AB lungo un «profilo», esterne, e quelle come DC, lungo una sezione circolare, interne). I punti dove una superficie si comporta in questo modo si dicono *iperbolici* (quelli ove c'è concavità da una banda ecc. *ellittici*; tralasciamo di soffermarci sul caso intermedio di punti *parabolici* — come quelli di un cilindro circolare — o su altre precisazioni qui fuori luogo).

Cfr. per maggiori sviluppi CURVATURA (?); v. GEODETICA, PRODOTTO (figura).

Se la superficie si pensa come plastico di una funzione dei punti del piano, dicendola *concava* o *convessa* si sottintenderà «verso l'alto»; in entrambi i casi si dirà *ellittica* e altrimenti *iperbolica* (oppure: «a punti ellittici» o «iperbolici».

OMOTETIA: La spiegazione più immediata si ha pensando al caso del piano, grazie all'uso del *pantografo*; se vi si ha un qualunque disegno e si fa centro in un punto qualunque O, si può riprodurlo ingrandito (o rimpicciolirlo) in un rapporto qualunque r (ossia: «da 1 ad r»; se è $r > 1$ si ha ingrandimento, se è $0 \leq r < 1$ impicciolimento) in quanto ogni punto P si trasporta nel corrispondente $P' = O + r(P - O)$ (ossia: ogni VETTORE $P - O$ viene moltiplicato per r dando $P' - O = r(P - O)$ o ancora tutto il piano viene ingrandito (impicciolito) partendo da O in tutte le direzioni alterando le lunghezze nel rapporto da 1 ad r. Lo stesso effetto si ha ingrandendo (o impicciolendo) una fotografia ecc.

La stessa trasformazione si può anche pensare limitata ad una retta oppure estesa a tutto lo spazio; e si può anche includere il caso in cui r sia negativo (allora si ha oltre all'ingrandimento o impicciolimento a seconda che $|r|$ — valore assoluto o MODULO (v.) — sia >1 o <1, anche una simmetria rispetto all'origine data da $r=-1$).

Tutte queste trasformazioni si dicono OMOTETIE (incluso il caso $r=1$, IDENTITA' ($P'=P$), e quello DEGENERE ($P'=O$) per $r=0$; in sostanza esse non sono che numeri reali r concepiti come moltiplicatori per i vettori (relativamente ad una certa origine O).

Si noti (DIMENSIONI) che per un'omotetia di rapporto r, le lunghezze risultano moltiplicate per r, le aree per r^2, i volumi per r^3.

Con riferimento alle nozioni di GRUPPOIDE e GRUPPO, cosa si potrà osservare? È ovvio intanto che *l'inversa* dell'omotetia di rapporto r e centro O (e diremo brevemente: omotetia $(r;\ O)$) altro non è che l'omotetia $(1/r;\ O)$ (salvo il caso $r=0$, per cui non esiste). Quanto al *prodotto*, notiamo che la $(r';\ O')$ trasporta il generico punto P in $P'=O'+ r'(P-O')=r'P+(1-r')O'$, ed un'altra $(r'';\ O'')$ trasporta P' in $P''=O''+r''\ (P'-O'')=r''\ P'+(1-r'')O''$; sostituendo a P' l'espressione precedente risulta $P''=r''r'P+r''(1-r')\ O'+(1-r'')O''$ che dà, se $r=r'r''\neq 1$, $P''=O+r(P-O)=rP+(1-r)O$ con $r=r'r''$ ed $O=\dfrac{(1-r'')\,O''+r''(1-r')\,O}{1-r}$ mentre se $r=r'r''=1$ risulta $P''= =P+(1-r'')(O''-O')$. Quest'ultimo caso dice che, mentre in genere il prodotto di due omotetie è un'omotetia (rapporto $r=r'r''$, centro O allineato con O' e O''), può anche avvenire — quando $r=1$ — che il risultato sia una traslazione (nella direzione della congiungente di O' e O''); per persuadersene si veda cosa succede ingrandendo il piano nel rapporto 1 : 2 (cioè raddoppiandolo) con centro in un punto O' e poi riducendolo a metà con centro in un punto diverso, O''; riprende naturalmente le dimensioni iniziali, ma si trova spostato a metà della traslazione che porterebbe O' in O''.

In base a quanto detto, si constati che: l'insieme di tutte le omotetie (non degeneri, escluso cioè $r=0$) formano un gruppo pur di includervi le traslazioni; considerando tutte le omotetie con centro O su un dato piano, o retta, conclusioni identiche (traslazioni parallele al piano o retta); considerando infine le omotetie con centro O fisso, sono *gruppi* quelle con r qualunque non nullo; con r positivo; con r RAZIONALE non nullo; con r razionale positivo; sono *gruppoidi* (ma non gruppi) quelle con r qualunque (anche nullo); con $r\geq 1$; con $|r|\geq 1$; con $1/r\geq 1$; con $1/|r|\geq 1$; (od anche sostituendo ad 1 un numero maggiore, o con altre varianti); con r intero, o intero non nullo, o intero positivo o pari, o potenza di due ecc.; ecc. È interessante notare infine che il prodotto di due omotetie, ad eccezione dei casi ovvi di centro O fisso ($O'=O''$, e quindi $=O$) o di riduzione a un'identità ($r'=1$, oppure $r''=1$, o entrambi), non è mai commutativo (e pertanto solamente il gruppo delle omotetie con centro O fisso — e i suoi sottogruppi — è commutativo). Infatti, la formula che dà O, per dare il medesimo risultato scambiando $(r';\ O')$ e $(r'';\ O'')$, dovrebbe dare

$$(1-r')O'+r'(1-r'')O''=(1-r'')O''+r''(1-r')O';$$

se $O' \neq O''$ devono essere uguali i coefficienti, ossia

$$(1-r') = r''(1-r') \quad \text{e} \quad r'(1-r'') = (1-r''),$$

condizioni soddisfatte se e solo se $r' = 1$ oppure $r'' = 1$ (o entrambi).

N.B. - Non c'è scopo di spendere tempo per verificare tutte queste affermazioni, o parecchie; sono indicate per dare un'idea di come si possano moltiplicare gli esempi, e perchè può essere istruttivo rendersi conto del «perchè» esaminandone uno qualsiasi.

EREDITARIETÀ (Leggi di Mendel).

Ora è noto che i caratteri ereditari si trasmettono per effetto di *geni* che si trovano nei CROMOSOMI (v.). Ma assai prima che si avesse potuto scoprire con l'osservazione l'effettivo supporto e meccanismo di tale processo, ne era stato individuato lo schema in quanto si era presentato come appropriata possibile spiegazione o interpretazione di risultati statistici. È un esempio interessante di come la semplice ricerca di uno schema soddisfacente a delle esigenze concettuali ispirate a una adeguata visione scientifica possa talvolta precorrere e far presagire cose ancora non osservate o non osservabili (cfr. anche PIANETI (Leverrier), e altri es. ...).

L'esempio più semplice cui conviene limitarci, è quello di una pianta che si presenta in tre varianti: con fiori *bianchi* o *rossi* o *rosa*. Le osservazioni sugli incroci hanno portato a concludere che:

bianco con bianco dà bianco, rosso con rosso dà rosso;

bianco con rosso dà rosa;

bianco con rosa dà per metà piante con fiori bianchi e per metà piante con fiori rosa, e così rosso con rosa metà rosso e metà rosa;

infine rosa con rosa dà per metà piante con fiori rosa e altri due quarti di piante con fiori bianchi e di piante con fiori rossi.

Da questo comportamento viene spontanea l'idea che esista qualche cosa: degli «elementi genetici», e diciamoli pure «geni» anche se siamo per ora nei panni di chi non poteva prevedere cosa potessero essere e se mai si sarebbe riusciti a «osservarli», portatori dei caratteri *bianco* e *rosso* (indichiamoli con A ed a) mentre il rosa appare caratterizzato da una mistura dei due (perchè dal loro incrocio proviene e ad essi mediante incroci dà luogo). Inoltre ogni individuo (nell'esempio in oggetto, singola pianta) mostra di possedere «geni» di provenienza da ciascuno dei due genitori. Lo schema più semplice immaginabile è che ogni individuo possiede due geni, per il dato carattere e cioè AA per bianco, aa per rosso, Aa per rosa, e che dei due uno provenga da un genitore e l'altro dall'altro. Allora è chiaro che gli incroci di AA con AA debbano dare AA, aa con aa diano aa, ed AA con aa non possono che dare Aa (come appunto s'è detto).

Inoltre AA con Aa può dare AA od Aa (a seconda che il genitore di tipo Aa trasmetta il gene A oppure a), e così aa con Aa può dare aa

od Aa; basta supporre che c'è la stessa probabilità che il genitore Aa trasmetta il carattere A oppure a, come se ciò venisse deciso a testa e croce, ed ecco spiegato che i discendenti debbano essere all'incirca metà per tipo. Ed anche il caso più complicato si spiega senz'altro con questa stessa idea: nell'incrocio di Aa con Aa entrambi i genitori possono tramettere o A o a, come se per entrambi la decisione fosse presa a testa e croce: abbiamo allora quattro casi ugualmente probabili (AA, Aa, aA, aa: indicando prima il gene di uno dei genitori e poi quello dell'altro) che daranno luogo a discendenza all'incirca di un quarto per tipo. Però i due *tipi* Aa e aA non si distinguono (sono sempre rosa, indifferentemente quale dei due genitori abbia trasmesso il gene A e quale il gene a), e perciò le proporzioni sono 1/4 per AA e per aa ed 1/2 per Aa.

Vedere qualche voce su probabilità e statistica.

POSSIBILE.

È bene riflettere sull'ambiguità che hanno spesso le parole di significato apparentemente più evidente, e sulla conseguente necessità di precisare, ogni qual volta si ravvisi un rischio di malintesi, il senso preciso di ciò che si vuol eprimere.

Diceva Giovanni Papini, parlando di Mario Calderoni (entrambi acuti pensatori intorno al 1900), che «a lui premeva insegnare con quali cautele e quali accorgimenti si possa giungere a ottenere delle proposizioni che abbiano un senso»; ciò è importante perchè «l'uomo — come scrisse Goethe — ritiene usualmente, quando egli ascolta solo parole, che ci sia dentro anche qualcosa su cui si abbia da pensare». È bene d'altronde riflettere su esempi pratici, altrimenti si rischierebbe di perdersi in distinzioni da dizionario o in disquisizioni filosofiche ancor più ambigue e oscure di ciò che si dovrebbe chiarire.

L'esempio del TAVOLO (v.) mostra come, in un certo senso, esso possa poggiare solo su due terne di zampe (diciamo ABC e CDA, essendo $ABCD$ le quattro zampe nell'ordine); ma in uno stadio anteriore di mancanza di informazioni potrebbero esser possibili invece le altre due, BCD e DAB, e pertanto, in altro senso, lo sono in quel momento tutte e quattro.

Si tratta di precisare che *possibile* è ciò che (in un dato momento, conoscendo certi dati e nozioni e ignorando altri) non posso (io, in relazione a tale stato d'informazione) dimostrare falso, impossibile. Dire che una cosa è possibile non significa, in tale senso così precisato, nulla di definitivo; con nuovi dati o con la constatazione diretta ciò che ora dico possibile diverrà in seguito o certo (vero) o impossibile (falso).
Spesso si usa *possibile* per dire qualcosa di più, e cioè «abbastanza probabile» (p. es. «è possibile che Tizio raggiunga i 100 anni» per dire non solo che ciò non è matematicamente escluso, come ovviamente non lo può essere per nessun vivente, ma che c'è qualche motivo per attenderlo).

È difficile evitare del tutto frasi del genere, ma è bene ricordare che sarebbero da evitare. Nel *possibile* non ci sono gradazioni; in esso si possono inserire poi — ma è altra cosa e sarebbe bene usare altra parola — gradazioni di PROBABILITÀ (v.).

Altra osservazione importante e diversa: anche quando si parla di impossibilità (assoluta, in senso matematico, logico, scientifico) occorre precisare le premesse e circostanze. L'impossibilità di risolvere certi problemi (p. es. la trisezione dell'angolo) significa che non si può arrivarci con un certo tipo di costruzioni o strumenti; l'impossibilità asserita molte volte dalla scienza di giungere a risultati da essa raggiunti più tardi doveva essere precisata come «impossibilità nell'ambito di certe premesse, con la disponibilità di certi mezzi, ecc.» (e, come norma semplice, per non essere smentiti, dovremmo non dire mai troppo avventatamente che qualcosa è impossibile).

Cenni in breve su altri argomenti.

Avvertenza. — Lo sviluppo delle «voci» in forma approssimativamente adeguata al fine indicato richiede spazio e tempo più di quanto sia per il momento giustificato. Benchè i pochi esempi di «voci» siano scarsamente rappresentativi e indubbiamente insufficienti, prego cercar di vedere in essi le intenzioni e le possibilità, al di là di ciò che dicono. Per rimediare in parte alla scarsità di esemplificazioni sviluppate, presento qui alcuni cenni indicativi su altri argomenti che avrei voluto aggiungere, e sui motivi che ispiravano la loro scelta.

1) Proprietà geometriche in grande, che ritengo istruttive e necessarie e molto più elementari nella loro essenza di quanto non si pensi guardandole, a torto, attraverso gli strumenti complicati con cui si usa presentarle. Esempi: Idea di geodetica, filo teso sopra una superficie, di qui sia proprietà di minimo che proprietà locale(normale principale della curva e normale alla superficie); idem moto per inerzia su superficie liscia; ecc. ecc.

Dalla domanda «su che faccia, il filo?» si può passare a distinguere concavità, convessità, punti ellittici e iperbolici, studio delle proprietà qualitative, anche in base all'osservazione(osservare e distinguere tutte le superfici curve di oggetti noti, del viso, superfici topografiche: imparare a distinguere a occhio o con esperienze, appoggiandovi piani, rette, o immergendo nell'acqua per vedere l'intersezione col piano tangente, ecc.); superficie ad area minima, esperienze con membrane di acqua e sapone, spiegazione sommaria con equilibrio tensioni, proprietà di minimo. Proprietà analoghe per bolle di sapone; problemi isoperimetrici, relazione con simmetrie, ecc.; problemi analoghi più semplici (quadrato, area massima fra rettangoli di dato perimetro; scatola volume massimo da rettangolo dato; ecc.). Esperimenti: far costruire scatole da foglio di date dimensioni ai vari allievi; confrontare risultati (costruzione su grafico, vedere chi ha ottenuto il volume maggiore e confronto con analisi diretta, ecc.

2) La visione in prospettiva: distinguere dapprima a occhio e poi individuando il perchè eventuali errori; pervenire a nozioni proiettive e individuare relazioni fra misure (distanze, ecc.) nell'immagine e nella realtà; da qui (oltre che altre molte vie) progressione geometrica.

3) Esempi espressivi elementari per illustrare ragionamenti come: dimostrazioni per induzione; logica (algebra di Boole); sistemi di numerazione; codificazioni, quantità d'informazione; ecc. Altri esempi per gruppi: rotazione nel piano (incluse traslazioni) in contrapposto a spazio (rototraslazioni!); traslazione mediante rotazioni: esempio, modo di spostare armadio (con rotazione), spiegazioni varie fatte mediante l'attrito (simile a BARICENTRO *c*)); possibile generare rotazioni mediante simmetrie? discutere pensando e sperimentando (p. es. rotazione dell'immagine di un oggetto attraverso due specchi). Rotazione di $1/n$ di angolo giro attorno a un punto O; sottogruppi - divisori di n, numeri primi.

4) Sperimentazione statistica e probabilistica: raccolta di risultati a testa e croce (o dadi ecc.) di diversi allievi, presentazione in forma di grafico, tentativi di impostazione razionale, « verifica » di alcune proprietà (p. es. scarto quadratico medio crescente con la radice di $n =$ N° prove); apparato di Bitterling; esperimenti per avvio ai concetti tipo « controllo della qualità », « metodi di collaudo » (confronto tra risultati di metodi sequenziali e no; convenienza a seconda di modalità e costi). Esperimenti di valutazioni di probabilità (concorsi con premi e penalizzazioni, p. es. per campionato di calcio, gare scolastiche, avvenimenti locali, ecc.); elaborazione dei risultati e confronto fra i partecipanti per ripensamento e ammaestramento. Giochi per valutare la convenienza di decisioni in condizioni che simulano semplici situazioni di problemi economici o di ricerca operativa.

5) Avviamento alla visione in 1-2-3-n-dimensioni. In tutti i casi che si prestano (e sono assai più di quanto forse non sembri secondo le vedute correnti) credo sarebbe di grande utilità educativa cercar di passare rapidamente ai casi di più dimensioni, anzichè soffermarsi a segnare lungamente il passo su casi troppo semplici, poco istruttivi, col rischio di deteriorare col disuso le facoltà di visuale pluridimensionale. Ma certamente occorre precisare ed esemplificare il senso e le modalità di tali intendimenti, che sono lontani da entrambi i modelli più conosciuti di criteri didattici.

Il primo — quello contro cui si rivolgevano le precedenti osservazioni preliminari — è quello che porta a soffermarsi tanto a lungo sulla geometria piana che poi il passaggio alle tre dimensioni in cui pur viviamo, anzichè come la cessazione di un'artificiosa limitazione, appare come una novità impressionante e incomprensibile. Ma la contrarietà a questa linea, per cui prima di passare allo spazio pare obbligatorio apprendere a menadito tutte le quisquilie sui triangoli, non significa che propugni alcunchè di simile alla generalità astratta e vuota, come qualche collega, ascoltandomi, paventava. Non certo, cioè, un'impostazione che parta all'improvviso dal caso di n dimensioni, o anche solo di tre, per poi occuparsi di due o una dimensione quale caso particolare; fra due estremi siffatti non saprei a chi dare il primato del pessimismo. La via conforme alla visione generale didattica e culturale prospettata, prende come punto di partenza un'osservazione molto sensata di Enriques: per ogni problema esiste un certo numero di dimensioni più adatto, ed è il più basso in cui lo si possa vedere nella giusta generalità. Nell'ambito dei modesti problemi di cui ci occupiamo, si tratterà sempre di illustrarli dapprima e per benino soltanto per $n=1$ o $n=2$; poi però subito giova sfruttare ciò che ivi è stato dimostrato per illustrare (più o meno succintamente e descrittivamente) le analoghe ma spesso più ricche e interessanti questioni e proprietà del caso tridimensionale; ed inoltre, ove è agevole e utile (p. es. vettori e matrici) indicare l'estensione sia pur formale al caso di n dimensioni, facendo intravvedere come comunque l'estensione di una terminologia geometrica anche in tale ambito abbia ben più valore di un semplice abuso di linguaggio.

B. DE FINETTI

Azzoguidi - Soc. Tip. Edit. - Via Emilia Ponente 421/B - Bologna (Italy)